

Prüfung Mathematik III

1. (8 Punkte) Eine chemische Reaktion wird durch das folgende System gegeben

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + d(t) \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$
$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad d(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie $y(t)$.

2. (7 Punkte) Es sei Ω das Quadrat $(-1, 1) \times (-1, 1)$ und

$$q(x, y) = \begin{cases} q_0, & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) + q(x, y) = 0 & \text{in } \Omega \\ u_x(-1, y) = u_x(1, y) = 0 \\ u(x, -1) = u(x, 1) = 0 \end{cases}$$

Was ist der maximale Wert von u ? (Reihendarstellung)

3. (7 Punkte) Berechnen Sie die Lösung von

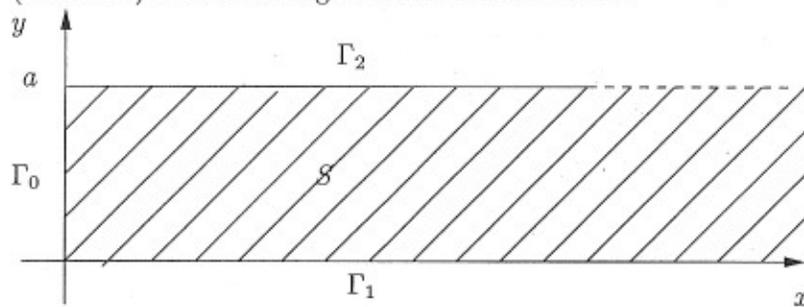
$$\begin{cases} u_t(x, t) = Du_{xx}(x, t) + q_0, & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ u(-\frac{\pi}{2}, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = e^{-\alpha t} \\ u(x, 0) = 1 \end{cases}$$

und geben Sie auch den Limes für $t \rightarrow \infty$ (stationäre Lösung).

Annahme: $\frac{\alpha}{D} \notin \mathbb{N}$.

Bitte wenden!

4. (8 Punkte) Wärmeleitung in einem Halbstreifen S



Gesucht ist die Lösung von

$$\begin{cases} u_t = D\Delta u & \text{in } S \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{auf } \Gamma_0 \\ u = 0 & \text{auf } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \text{auf } \Gamma_2 \\ u(x, y, 0) = \begin{cases} \frac{y}{a} & 0 < x < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Viel Erfolg!