Prof. Dr. R. Sperb

Lösung Probe Vordiplom

1. Mit die Laplacetransformation

$$x \circ\!\!-\!\!\bullet X(p)$$
$$1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{p}$$
$$\dot{x} \circ\!\!-\!\!\bullet pX(p) - x(0)$$
$$\sin^2(t) = \frac{1}{2}(1-\cos(2t)) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right) = \frac{2}{p(p^2+4)}$$

erhalten wir

$$\begin{cases} \frac{p}{2}X_1(p) = X_1(p) - 2X_2(p) + \frac{1}{p} \\ \frac{p}{2}X_2(p) - \frac{1}{4} = X_1(p) - X_2(p) + \frac{2}{p(p^2+4)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_2(p) = \frac{2-p}{4}X_1(p) + \frac{1}{2p} \\ X_2(p) = \frac{2}{p+2}\left(X_1(p) + \frac{p^3+4p+8}{4p(p^2+4)}\right) \end{cases}$$

Die Lösung für $X_1(p)$ ist

$$\begin{aligned} \frac{2-p}{4}X_1(p) + \frac{1}{2p} &= \frac{2}{p+2}\left(X_1(p) + \frac{p^3+4p+8}{4p(p^2+4)}\right) \\ (4-p^2)X_1(p) + \frac{4+2p}{p} &= 8X_1(p) + \frac{2p^3+8p+16}{p(p^2+4)} \\ (p^2+4)X_1(p) &= \frac{4+2p}{p} - \frac{2p^3+8p+16}{p(p^2+4)} = \frac{4p}{p^2+4} \\ X_1(p) &= \frac{4p}{(p^2+4)^2} \end{aligned}$$

Um die Rücktransformation von X_1 zu bekommen, andwenden wir die Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{4p}{(p^2+4)^2} &= \frac{A}{(p+2i)^2} + \frac{B}{(p-2i)^2} + \frac{C}{p+2i} + \frac{D}{p-2i} \\ 4p &= A(p-2i)^2 + B(p+2i)^2 + C(p^2+2)(p-2i) + D(p^2+2)(p+2i) \\ 4p &= p^3(C+D) + p^2(A+B-2iC+2iD) - p(4iA-4iB-2C-2D) \\ &\quad - 4A - 4B - 4iC + 4iD \end{aligned}$$

Mit Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$\begin{cases} C+D=0 \\ A+B-2iC+2iD=0 \\ 2iA-2iB-C-D=2 \\ 2A+2B+iC-iD=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A=\frac{i}{2} \\ B=-\frac{i}{2} \\ C=0 \\ D=0 \end{array}$$

Die Rücktranformaiton von X_1 ist

$$X_1(p)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(p-i)^2}-\frac{1}{(p+i)^2}\right) \bullet\!\!-\!\!\circ\; x_1(t)=\frac{1}{2i}\left(te^{it}-te^{-it}\right)=t\sin(t)$$

2. Um den Problem zu lösen brauchen wir homogene Randbedingungen. Wir homogenisieren den Problem durch

$$v=u-xe^{-t}$$

Die Differentialgleichiung für v ist

$$v_t=u_t+xe^{-t}=Du_{xx}-x+xe^{-t}=Dv_{xx}-x(1-e^{-t})$$

und ist die Anfangsbedingung

$$v(x,0)=u(x,0)-x=x(x-1)$$

Das neues Problem ist

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}=D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-x(1-e^{-t}) \quad \text{in } (0,1) \\ v(0,t)=0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1,t)=0 \\ v(x,0)=x(x-1) \end{cases}$$

Das zugehörige Eigenwertproblem ist

$$\begin{cases} \varphi''+\lambda\varphi=0 \\ \varphi(0)=\varphi'(1)=0 \end{cases}$$

Die normirte Lösung ist

$$\varphi_k(x)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right) \qquad \lambda_k=\frac{\pi^2k^2}{4}$$

mit $k=1,3,5,\cdots$. Der Wärmeleitungskern ist

$$K(x,\xi,t)=\sum_k \varphi_k(x)\varphi_k(\xi)e^{-D\lambda_k t}=2\sum_{\substack{k=1\\ \text{ungerade}}}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi k}{2}\xi\right)e^{-D\lambda_k t}$$

Wir bekommen die Lösung für v durch

$$
\begin{aligned}
v(x,t) &= \int_0^1 v(\xi,0)K(x,\xi,t)d\xi + \int_0^t \int_0^1 q(\xi,\tau)K(x,\xi,\tau)d\xi d\tau = \\
&= \int_0^1 \xi(\xi-1)2 \sum_{\substack{k=1\\ \text{ungerade}}}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi k}{2}\xi\right) e^{-D\lambda_k t} d\xi \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \xi(e^{-\tau}-1)2 \sum_{\substack{k=1\\ \text{ungerade}}}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi k}{2}\xi\right) e^{-D\lambda_k (t-\tau)} d\xi = \\
&= 2 \sum_{\substack{k=1\\ \text{ungerade}}}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right) e^{-D\lambda_k t} \left(\int_0^1 \xi(\xi-1)\sin\left(\frac{\pi k}{2}\xi\right) d\xi \right. \\
&+ \left. \int_0^1 \xi \sin\left(\frac{\pi k}{2}\xi\right) d\xi \int_0^t (e^{(D\lambda_k - 1)\tau} - e^{D\lambda_k \tau}) d\tau \right)
\end{aligned}
$$

mit k ungerade die Integralen werden

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \xi \sin\left(\frac{\pi k}{2}\xi\right) d\xi &= -\frac{2}{\pi k}\xi\cos\left(\frac{\pi k}{2}\xi\right)\Big|_0^1 + \frac{2}{\pi k}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi k}{2}\xi\right) d\xi = \\
&= \frac{4}{\pi^2 k^2}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\xi\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{\pi^2 k^2}(-1)^{\frac{k-1}{2}}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \xi(\xi-1)\sin\left(\frac{\pi k}{2}\xi\right) d\xi &= -\frac{2}{\pi k}\xi(\xi-1)\cos\left(\frac{\pi k}{2}\xi\right)\Big|_0^1 + \frac{2}{\pi k}\int_0^1 (2\xi-1)\cos\left(\frac{\pi k}{2}\xi\right) d\xi = \\
&= \frac{4}{\pi^2 k^2}(2\xi-1)\sin\left(\frac{\pi k}{2}\xi\right)\Big|_0^1 - \frac{8}{\pi^2 k^2}\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi k}{2}\xi\right) d\xi = \\
&= \frac{4}{\pi^2 k^2}(-1)^{\frac{k-1}{2}} + \frac{16}{\pi^3 k^3}\cos\left(\frac{\pi k}{2}\xi\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{\pi^2 k^2}(-1)^{\frac{k-1}{2}} - \frac{16}{\pi^3 k^3}
\end{aligned}
$$

und

$$
\int_0^t (e^{(D\lambda_k - 1)\tau} - e^{D\lambda_k \tau}) d\tau = \frac{e^{(D\lambda_k-1)t} - 1}{D\lambda_k - 1} - \frac{e^{D\lambda_k t} - 1}{D\lambda_k}
$$

ehalten wir

$$v(x,t) = 2 \sum_{\substack{k=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right) e^{-D\lambda_k t} \left(\frac{4}{\pi^2 k^2}(-1)^{\frac{k-1}{2}} - \frac{16}{\pi^3 k^3}\right.$$
$$\left. + \frac{4}{\pi^2 k^2}(-1)^{\frac{k-1}{2}} \left(\frac{e^{(D\lambda_k - 1)t} - 1}{D\lambda_k - 1} - \frac{e^{D\lambda_k t} - 1}{D\lambda_k}\right)\right) =$$
$$= \frac{8}{\pi^2} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^2}\left(e^{-D\lambda_k t} + \frac{e^{-t} - e^{-D\lambda_k t}}{D\lambda_k - 1} - \frac{1 - e^{-D\lambda_k t}}{D\lambda_k}\right) - \frac{8}{\pi k^3}\right) \sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right)$$

Die Lösung für u ist

$$u(x,t) = v(x,t) + xe^{-t} =$$
$$= \frac{8}{\pi^2} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^2}\left(e^{-D\lambda_k t} + \frac{e^{-t} - e^{-D\lambda_k t}}{D\lambda_k - 1} - \frac{1 - e^{-D\lambda_k t}}{D\lambda_k}\right) - \frac{8}{\pi k^3}\right) \sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right) + xe^{-t}$$

3. Den Zugehörige Eigenwertproblem ist

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 & \text{auf } \Gamma_0 \\ \varphi = 0 & \text{auf } \Gamma_1 \end{cases}$$

Die normierte Lösung ist

$$\varphi_{k,l} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}ly\right)$$

mit $\lambda_{k,l} = \pi^2(k^2 + l^2)$, wo $k, l = 1, 3, 5, \cdot$.
bvgWir enwicklen die Quelle durch die Eigenfunktinonen

$$q(x,y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{k,l}\varphi_{k,l}(x,y)$$

wo

$$\alpha_{k,l} = \int_\Omega q(x,y)\varphi_{k,l}(x,y)dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} 2\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}ly\right)dy\,dx =$$
$$= 2\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)\left(\frac{1}{\pi l}\sin\left(\frac{\pi}{2}ly\right)\right)_0^{1-x} dx = \frac{2}{\pi l}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}l + \frac{\pi}{2}lx\right)dx$$

mit k ungerade erhalten wir

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}l + \frac{\pi}{2}lx\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}l\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}lx\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}lx\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}l\right) = (-1)^{\frac{k-1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}lx\right)$$

dann

$$\alpha_{k,l} = \frac{2(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{\pi l} \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}lx\right) dx = \frac{2(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{\pi l} \frac{\delta_{k,l}}{2} =$$
$$= \frac{\delta_{k,l}(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{\pi l}$$

Setzen wir die Ansatz

$$u(x,y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} u_{k,l}\varphi_{k,l}(x,y)$$

in der Differentialgleichung

$$\Delta u + q(x,y) = 0$$
$$\Delta\left(\sum_{k,l=1}^{\infty} u_{k,l}\varphi_{k,l}(x,y)\right) + \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{k,l}\varphi_{k,l}(x,y) = 0$$
$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left(\alpha_{k,l} - \lambda_{k,l}u_{k,l}\right)\varphi_{k,l}(x,y) = 0$$
$$\Rightarrow \quad u_{k,l} = \frac{\alpha_{k,l}}{\lambda_{k,l}}$$

Die Lösung wird

$$u(x,y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{\alpha_{k,l}}{\lambda_{k,l}}\varphi_{k,l}(x,y) = \sum_{\substack{k,l=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \frac{\frac{\delta_{k,l}(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{\pi l}}{\pi^2(k^2+l^2)} 2\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}ly\right) =$$
$$= \frac{1}{\pi^3} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^3} \cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}ky\right)$$

4. Zuerst entfernen den Reaktion-Term mittels

$$w(x,t) = u(x,t)e^{\gamma t}$$

Die Differentialgleichung wird

$$w_t = u_t e^{\gamma t} + \gamma u e^{\gamma t} = (D\Delta u - \gamma u)e^{\gamma t} + \gamma u e^{\gamma} = \Delta u e^{\gamma t} = \Delta w$$

Das Problem die wir erhalten

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = D\Delta w & \text{in } \Omega \\ w = 1 & \text{auf } \partial\Omega \\ w(x,y,z,0) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le \frac{b}{2} \text{ und } 0 \le z \le 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

hat noch Inhomogene Randbedingungen. Mit

$$v = w - 1$$

erhalten wir ein homogenes Problem

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = D\Delta v & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega \\ v(x,y,z,0) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le \frac{b}{2} \text{ und } 0 \le z \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Um diesen Problem zu Lösen machen wir den Ansatz

$$v(x,y,z,t) = v_1(x,y,t)v_2(z,t)$$

, so dass wir zwei einfacher Teilproblemen finden.

1.

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial t} = D\Delta v_1 & \text{in } (0,a)\times(0,b) \\ v_1(0,y,t) = v_1(a,y,t) = v_2(x,0,t) = v_2(x,b,t) = 0 \\ v_1(x,y,0) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le \frac{b}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \frac{\partial v_2}{\partial t} = D\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} & \text{in } (0,\infty) \\ v_1(0,t) = 0 \\ v_1(z,0) = \begin{cases} 1 & \text{für } z \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Um das erste Problem zu lösen, sollen wir den zugehörige Eigenwertproblem

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 & \text{in } (0,a)\times(0,b) \\ \varphi(0,y) = \varphi(a,y) = \varphi(x,0) = \varphi(x,b) = 0 \end{cases}$$

bekommen. Die normierte Lösung dieses Problem ist

$$\varphi_{k,l} = \frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\left(\frac{\pi k}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi l}{b}y\right) \qquad \lambda_{k,l} = \pi^2\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right)$$

mit $k = 1, 2, 3, \cdots$.
Den Wärmeleitungskern ist

$$K(x,y,\xi,\eta,t) = \sum_{k,l} \varphi_{k,l}(x,y)\varphi_{k,l}(\xi,\eta)e^{-D\lambda_{k,l}t} =$$
$$= \frac{4}{ab}\sum_{k,l=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi l}{b}y\right)\sin\left(\frac{\pi k}{a}\xi\right)\sin\left(\frac{\pi l}{b}\eta\right)e^{-D\lambda_{k,l}t}$$

Die Lösung für v_1 ist

$$v_1(x,y,t) = \int_0^a \int_0^b v(\xi,\eta,0) K(x,y,\xi,\eta,t) d\xi d\eta =$$

$$= \int_0^a \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{4}{ab} \sum_{k,l=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi l}{b}y\right) \sin\left(\frac{\pi k}{a}\xi\right) \sin\left(\frac{\pi l}{b}\eta\right) e^{-D\lambda_{k,l}t} d\xi d\eta =$$

$$= \frac{4}{ab} \sum_{k,l=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi l}{b}y\right) e^{-D\lambda_{k,l}t} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi k}{a}\xi\right) d\xi \int_0^{\frac{b}{2}} \sin\left(\frac{\pi l}{b}\eta\right) d\eta$$

mit

$$\int_0^a \sin\left(\frac{\pi k}{a}\xi\right) d\xi = \begin{cases} \frac{2a}{\pi k} & \text{k ungerade} \\ 0 & \text{k gerade} \end{cases}$$

und

$$\int_0^{\frac{b}{2}} \sin\left(\frac{\pi l}{b}\eta\right) d\eta = \frac{b\left(1-\cos\left(\frac{\pi l}{2}\right)\right)}{\pi l}$$

erhalten wir

$$v_2(x,y,t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi l}{2}\right)}{kl} \sin\left(\frac{\pi k}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi l}{b}y\right) e^{-D\lambda_{k,l}t}$$

Um den zweiten Problem zu Lösen muss dieses Problem in $(0,\infty)$ auf $(-\infty,\infty)$ erweitert werden. Die erweiterung wird durch eine punktsymmetrische Spiegelung um z=0 gemacht,weil die Randbedingung $u = 0$ ist.

$$\begin{cases} \frac{\partial v_2}{\partial t} = D\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} & \text{in } (-\infty,\infty) \\ v_1(z,0) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le z \le 1 \\ -1 & \text{für } -1 \le z \le 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} & \end{cases}$$

In die Vorlesung wurde gerechnet die Lösung von

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \quad \text{in } (-\infty,\infty)$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Die Lösung ist

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) \tag{1}$$

Wegen linearität kann man die Lösung von diesem Problem, um die Lösung für $v_2(z,t)$ zu berechnen. Man zwerlegt die Anfangsbedingung $v_2(z,0)$ mit die Stufefunktion

$$h(z) = \begin{cases} 1 & , \quad z < 0 \\ 0 & , \quad z > 0 \end{cases}$$

und die konstante Funktion, d.h

$$v_2(z,0) = h(z+1) - 2h(z) + h(z-1)$$

Die Lösung v_2 ist

$$v_2(z,t) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{erfc}\left(\frac{z+1}{2\sqrt{Dt}}\right) 2\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z-1}{2\sqrt{Dt}}\right)\right)$$

Die Lösung für u ist

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= w(x,y,z,t)e^{-\gamma t} = (v(x,y,z,t)+1)e^{-\gamma t} = e^{-\gamma t} + v_1(x,y,t)v_2(z,t)e^{-\gamma t} = \\ &= e^{-\gamma t} + \frac{4}{\pi^2}\left(\operatorname{erfc}\left(\frac{z+1}{2\sqrt{Dt}}\right) 2\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z-1}{2\sqrt{Dt}}\right)\right) \\ &\qquad \times \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi l}{2}\right)}{kl} \sin\left(\frac{\pi k}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi l}{b}y\right) e^{-D\lambda_{k,l}t} \end{aligned}$$