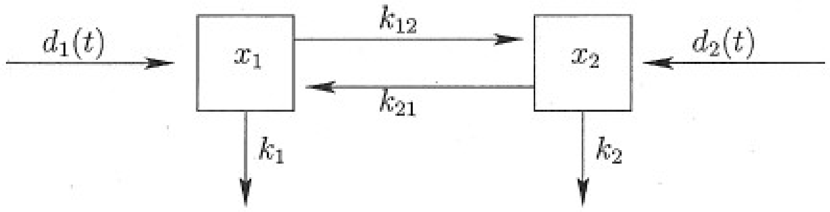
ETHZ, Abt D-AGRL, D-CHEM
Prof.Dr. R. Sperb

Herbst 2004

Vordiplom Mathematik III

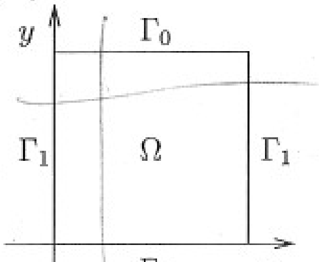
1. (7 Punkte) Ein Kompartimentsystem wird durch das folgende Schema beschrieben



In diesem Fall sind die Reaktiongeschwindigkeiten $k_1 = k_2 = k_{12} = 2$ und $k_{21} = 1$ und die Dosen $d_1(t) = 1 - e^{-t}$ und $d_2(t) = e^{-t}$.
Berechnen Sie $x_1(t)$ und $\lim_{t\to\infty} x_2(t)$ für den Fall leerer Kompartimente zum Zeitpunkt $t = 0$.

2. (7 Punkte) Der stationäre Zustand bei inhomogener Heizung wird beschrieben durch das folgende Randwertproblem in $\Omega = (0, a) \times (0, a)$:

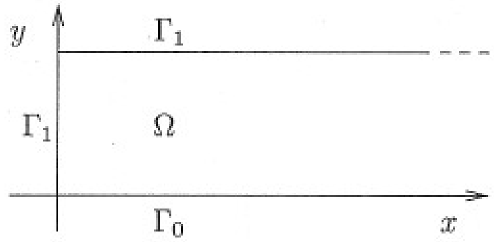
$$
\begin{aligned}
\Delta u + \frac{x}{a} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\
u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_0 \\
\frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_1
\end{aligned}
$$



Berechnen Sie die Temperaturverteilung $u(x, y)$.

Bitte wenden!

3. (9 Punkte) Es sei Ω der Halbstreifen $(0,\infty)\times(0,a)$



Berechnen Sie die Lösung des Diffusionsproblems

$$\begin{aligned}
u_t &= D\Delta u \quad \text{in } \Omega\\
u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_0\\
\frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_1\\
u(x,y,0) &= \begin{cases} 1-\cos\left(\frac{\pi}{2a}y\right), & 0\le x\le b\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}
\end{aligned}$$

4. (7 Punkte) Diffusion und Reaktion in einer Kugel. Ω sei die Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0,0,0)$. Gesucht ist die Lösung von

$$\begin{aligned}
u_t &= D\Delta u + r^2 \quad \text{in } \Omega\\
u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\\
u(r,0) &= 0
\end{aligned}$$

Berechnen Sie $u(r,t)$ und $\lim_{t\to\infty} u(r,t)$.

Viel Erfolg !