

2. Vordiplom

Wichtige Hinweise

- Hilfsmittel: 20 Seiten Zusammenfassung und Formelsammlung
- Zeit: 2 Stunden.

1. (7 Punkte) Temperaturausgleich im Kreis: Es sei Ω ein Kreis mit $0 \leq r \leq R$. Berechnen Sie die Lösung des stationären Wärmeleitproblems

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u(R, \varphi) = f(\varphi) \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

wobei die Randtemperatur durch $f(\varphi) = \varphi - \pi$ gegeben ist.

2. (6 Punkte) Wärmeabstrahlung mit Quelle: Es sei Ω das Quadrat $(0, a) \times (0, a)$, sowie das Randwertproblem

$$\Delta u - c^2 u + y \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u(0, y) = u(a, y) = 0 \quad 0 \leq y \leq b$$

$$u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = 0 \quad 0 \leq x \leq a$$

gegeben. Geben Sie die Lösung $u(x, y)$ an.

3. (9 Punkte) Wärmeleitung: Seien die positiven Konstanten q_0 und α und das Intervall $\Omega = (0, L)$ gegeben. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangsrandwertproblems der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = D u_{xx} + q_0 \quad \text{mit } x \in (0, L), t > 0$$

$$u(0, t) = 0, u_x(L, t) = -\alpha$$

$$u(x, 0) = \frac{x}{L}$$

Berechnen Sie auch den Grenzwert $u_\infty(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$

4. (8 Punkte) Diffusion im unendlichen Streifen: Es sei durch $(x, y) \in \Omega = (-\infty, \infty) \times (0, L)$ der unendliche Streifen mit der Dicke L gegeben. Auf Ω wird das Anfangsrandwertproblem

$$u_t = D \Delta u$$

$$u = 1 \quad \text{für } y = 0 \text{ und } y = L$$

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} \frac{y}{L} & \text{falls } -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

betrachtet. Finden Sie die Lösung $u(x, y, t)$.

Viel Erfolg !!!

7

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0$$

in $0 \leq r \leq R$

$$u(R, \varphi) = f(\varphi)$$

Ansatz $u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$

$$\Rightarrow r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = -n^2, \quad \frac{\Phi''}{\Phi} = -n^2$$

Φ -Gleichung: $\Phi_n(\varphi) = C_1^{(n)} \sin(n\varphi) + C_2^{(n)} \cos(n\varphi)$

R -Gleichung: $R(r) = r^\alpha$ einsetzen $\alpha(\alpha-1) + \alpha = -n^2$

$$\alpha = \pm n \quad R_n(r) = C_1^{(n)} r^n + C_2^{(n)} r^{-n}$$

$$R(r \rightarrow 0) < \infty \Rightarrow C_2^{(n)} = 0$$

Insg: $u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (C_n^{(1)} \sin(n\varphi) + C_n^{(2)} \cos(n\varphi))$

RB $u(R, \varphi) = \varphi - \pi$ Fourier-entwicklung in $[0, 2\pi]$

$$f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(n\varphi) + a_n \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(n\varphi) \right)$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{2\pi} (\varphi - \pi) \cos(n\varphi) d\varphi = \frac{\cos(2n\pi) - 1}{n^2 \sqrt{n}} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{2\pi} (\varphi - \pi) \sin(n\varphi) d\varphi = -\frac{2\sqrt{n} \cos(2n\pi)}{n} = -\frac{2\sqrt{n}}{n}$$

$$\Rightarrow C_n^{(1)} = 0 \quad C_n^{(2)} = -\frac{2}{n\sqrt{n}}$$

$$u(r, \varphi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{2}{n\sqrt{n}} \sin(n\varphi)$$

(2) $\Delta u - c^2 u + y \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) = 0$ in $[0, a] \times [0, a]$ $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -\frac{1}{L}$

$a = b$

$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0$

$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, a) = 0$

i) Eigenfunktionen/werte $\varphi(x, y) = X(x)Y(y), \quad \Delta \varphi + \lambda \varphi = 0$

$X(0) = X(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_{k,l}(x, y) = C \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{2} y\right)$
 $Y(0) = Y(a) = 0$

Normierung $\iint_0^a \varphi^2 dx dy = 1 \Rightarrow C^2 \frac{a^2}{4} = 1, \quad C = \frac{2}{a}$

Eigenwerte $\lambda_{k,l} = \frac{\pi^2}{a^2} \left(\frac{k^2}{4} + \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right), \quad k, l = 1, 2, \dots$

ii) $q(x, y) = \sum_{k,l} \beta_{k,l} \varphi_{k,l}(x, y)$

$\beta_{k,l} = \iint_0^a y \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \frac{2}{a} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{2} y\right) dx dy$

$= \frac{2}{a} \int_0^a \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) dx}_0 \int_0^a y \sin\left(\frac{l\pi}{2} y\right) dy$
 $\begin{cases} k=1 & \frac{a}{2} \\ \text{sonst} & 0 \end{cases} \quad -\frac{4a^2(-1)^2}{\pi^2(2l-1)^2}$

$= \begin{cases} -4a^2 \frac{(-1)^2}{\pi^2(2l-1)^2} & k=1, l \text{ bel.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

iii) Ansatz $u(x, y) = \sum \alpha_{k,l} \varphi_{k,l}(x, y)$ einsetzen

$\sim -\lambda_{k,l} \alpha_{k,l} - c^2 \alpha_{k,l} + \beta_{k,l} = 0 \quad \alpha_{k,l} = \frac{\beta_{k,l}}{\lambda_{k,l} + c^2}$

$u(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} 8 \frac{(-1)^l}{\pi^2(2l-1)^2} \frac{a}{\lambda_{1,l} + c^2} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{2} y\right)$

(3)

$u_t = D u_{xx} + q_0$ in $(0, L)$

$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -\frac{1}{L}$
 $u(x, 0) = \frac{x}{L}$

i) Homogenisieren: $u(x, t) = v(x, t) - \frac{1}{L} x, \quad v(x, t) = u(x, t) + \frac{1}{L} x$

$v_t = D v_{xx} + q_0$

$v(0, t) = v_x(L, t) = 0, \quad v(x, 0) = \left(\frac{x}{L} + \frac{1}{L}\right)x$

ii) Eigenfunktionen/werte: $\varphi'' + \lambda \varphi = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(L) = 0$

$\varphi_k(x) = C \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2L} x\right)$

Normierung: $C = \sqrt{\frac{2}{L}}, \quad \text{Eigenwerte: } \lambda_k = \left(\frac{(2k-1)\pi}{2L}\right)^2 \frac{\pi^2}{L^2}$

iii) Quelle: $q_0 = \sum \beta_k \varphi_k(x)$

$\beta_k = \int_0^L q_0 \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2L} x\right) dx = q_0 \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{1}{\pi(2k-1)} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right)$

iv) Ansatz: $v(x, t) = \sum \alpha_k(t) \varphi_k(x)$ einsetzen

$\alpha_k' + D \lambda_k \alpha_k - \beta_k = 0 \Rightarrow \alpha_k(t) = C e^{-D \lambda_k t} + \frac{\beta_k}{D \lambda_k}$
 $C = \alpha_k(0) - \frac{\beta_k}{D \lambda_k}$

v) Anfangsbedingungen: $v(x, 0) = \left(\frac{x}{L} + \frac{1}{L}\right)x = \sum \alpha_k(0) \varphi_k(x)$

$\alpha_k(0) = \int_0^L \left(\frac{x}{L} + \frac{1}{L}\right) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2L} x\right) dx = -\left(\frac{x}{L} + \frac{1}{L}\right) \frac{L^2}{\pi^2(2k-1)^2} \cos(k\pi)$

$\Rightarrow C$ bzw. $\alpha_k(t) = \alpha_k(0) e^{-D \lambda_k t} + \frac{\beta_k}{D \lambda_k} (1 - e^{-D \lambda_k t})$

Ans:
$$V(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(\frac{L}{2} + kL)^2 \cos(k\pi)}{\pi^2 (2k-1)^2} e^{-\frac{4\sqrt{2}q_0 \sqrt{L}}{\pi(2k-1)} D \lambda_k t} + \frac{4\sqrt{2}q_0 \sqrt{L}}{\pi(2k-1)} D \lambda_k \right] \frac{1-e^{-\frac{4\sqrt{2}q_0 \sqrt{L}}{\pi(2k-1)} D \lambda_k t}}{4\sqrt{2}q_0 \sqrt{L}} \sin(\frac{k\pi}{2} x)$$

$$u(x,t) = V(x,t) - \alpha x$$

Grenzwert:
$$u_0(x,t) = \sum \frac{4\sqrt{2}q_0 \sqrt{L}}{\pi(2k-1)} \frac{\sin(\frac{k\pi}{2} x)}{D \lambda_k} \frac{\sqrt{2}}{L} \sin(\frac{k\pi}{2} x) - \alpha x$$

oder
$$u_{xx} = -\frac{q_0}{D} \quad u_0(x) = \frac{q_0}{2D} x^2 + d_1 x + d_2$$

$$u_{\infty}(0) = 0 \Rightarrow d_1 = 0$$

$$u'_{\infty}(L) = -\alpha \Rightarrow d_2 = \frac{q_0}{DL} - \alpha$$

4 Zerlegung in 2 Probleme

$$u(x,y,t) = u^{(x)}(x,t) + u^{(y)}(y,t)$$

(i)
$$u_t^{(x)} = D u_{xx}^{(x)} \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (ii) \quad u_t^{(y)} = D u_{yy}^{(y)} \quad y \in (0, L)$$

$$u^{(x)}(x,0) = \begin{cases} 1 & -a < x < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$u^{(y)}(0,t) = u^{(y)}(L,t) = 1$$

$$u^{(y)}(y,0) = \frac{y}{L}$$

(i)
$$u^{(x)}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} u^{(x)}(s,0) e^{-\frac{(x-s)^2}{4Dt}} ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-a}^a e^{-\frac{(x-s)^2}{4Dt}} ds = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+a}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{\sqrt{4Dt}}\right) \right]$$

(ii) Homogenisieren
$$v(y,t) = u^{(y)}(y,t) - 1$$

$$v_t = D v_{yy}, \quad v(0,t) = v(L,t) = 0, \quad v(y,0) = \frac{y}{L} - 1$$

Eigenfunktionen/werte:
$$\varphi_k(y) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{k\pi}{L} y\right), \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}$$

 keine Quelle

$$v(y,t) = \sum d_k(t) \varphi_k(y) \quad \text{einsetzen} \quad d'_k = -D \lambda_k d_k$$

$$d_k(t) = d_k(0) e^{-D \lambda_k t}$$

Anfangsbedingung:
$$v(y,0) = \frac{y}{L} - 1 = \sum d_k(0) \varphi_k(y)$$

$$d_k(0) = \int_0^L \left(\frac{y}{L} - 1\right) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{k\pi}{L} y\right) dy = -\frac{\sqrt{2}L}{k\pi}$$