

$$V(x,t) = \sum \left(-\frac{\sqrt{L}}{k\pi} \right) e^{-D\lambda^2 t} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$$

$$u^{(1)}(y,t) = V(y,t) + 1$$

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+y}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-y}{\sqrt{4Dt}}\right) \right] \left[1 + \sum \frac{2}{k\pi} e^{-D\lambda^2 t} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{k\pi}{L}y\right) \right]$$

2. Vordiplom

Wichtige Hinweise

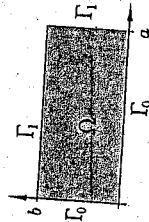
- Hilfsmittel: 20 Seiten Zusammenfassung und Formelsammlung
- Zeit: 2 Stunden.

1. (6 Punkte) Heizung einer Kugelschale: Es sei Ω die Kugelschale $1 \leq r \leq 2$ und das stationäre Wärmeleitproblem

$$\begin{aligned} \Delta u + 1 + r &= 0 & \text{in } \Omega \\ u_r &= 0 & \text{für } r=1 \\ u &= 0 & \text{für } r=2 \end{aligned}$$

gegeben. Berechnen Sie die Lösung des Randwertproblems und die Energie $\int_{\Omega} u \, dx$.

2. (6 Punkte) Es sei Ω das Rechteck $(0,a) \times (0,b)$ mit der Berandung



sowie

$$g(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}.$$

Wie lautet die Lösung des Randwertproblems, welches durch

$$\begin{aligned} \Delta u + g(x,y) &= 0 & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 & \text{auf } \Gamma_1 \end{aligned}$$

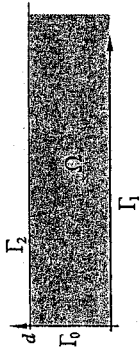
gegeben ist?

3. (8 Punkte) Inhomogene Wärmeleitung: Gesucht ist die Lösung des Anfangswertproblems der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= D u_{xx} + a \frac{x}{L} e^{-t} & \text{mit } x \in (0,L), t > 0 \\ u_x(0,t) &= 0, u(L,t) = 1 \\ u(x,0) &= \frac{x}{L} \end{aligned}$$

Berechnen Sie auch den Grenzwert $u_{\infty}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x,t)$

4. (8 Punkte) Halbumendliche Diffusion: Es wird Diffusion in dem halbumendlichen Streifen



mit der Dicke d entsprechend des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{aligned} u_t &= D \Delta u & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \Gamma_1 \text{ und } \Gamma_2 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 & \text{auf } \Gamma_0 \\ u(x, y, 0) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{falls } x > L \end{cases} \end{aligned}$$

betrachtet. Finden Sie die Lösung $u(x, y, t)$!

Viel Erfolg !!!

7

$$\Delta u \rightarrow \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r$$

$$\frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r = -1 - r$$

$$(r^2 u_r)_r = -r^2 - r^3$$

$$r^2 u_r = -\frac{1}{3} r^3 - \frac{1}{4} r^4 + C_1$$

$$u_r = -\frac{1}{3} r - \frac{1}{4} r^2 + \frac{C_1}{r^2}$$

$$u = -\frac{1}{6} r^2 - \frac{1}{12} r^3 - \frac{C_1}{r} + C_2$$

$$\text{RB } u_r(r=1) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{C_1}{1} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{7}{12}$$

$$u(r=2) = -\frac{1}{6} - \frac{8}{12} - \frac{7}{12} + \frac{C_2}{2} = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{13}{8}$$

$$u(r) = -\frac{1}{6} r^2 - \frac{1}{12} r^3 - \frac{7}{12} \frac{1}{r} + \frac{13}{8}$$

$$\int_{\Omega} u \, dx = 4\pi \int_1^2 u(r) r^2 \, dr = 4\pi \int_1^2 \left(-\frac{1}{6} r^4 - \frac{1}{12} r^5 - \frac{7}{12} r + \frac{13}{8} r^2 \right) r^2 \, dr$$

$$= 4\pi \left[-\frac{1}{30} r^5 - \frac{1}{72} r^6 - \frac{7}{24} r^2 + \frac{13}{24} r^3 \right]_1^2$$

$$= \frac{127}{30} \pi \approx 4\pi$$

Eigenfunktionen

2.1

② $\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0$

$\varphi = 0$ für $x=0$ / $y=0$
 $\partial_n \varphi = 0$ für $x=a$ / $y=b$

$\varphi = X(x) Y(y)$ $X(0) = X'(a) = 0 \rightarrow C^M \sin(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{a} x) = X(x)$
 $Y(0) = Y'(b) = 0 \rightarrow C^M \sin(\frac{2l-1}{2} \frac{\pi}{b} y) = Y(y)$

$$\left[\varphi_{k,l}(x,y) = C_1^k \sin(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{a} x) \sin(\frac{2l-1}{2} \frac{\pi}{b} y) \right]$$

$$\left[\int_0^a \int_0^b \varphi^2 dx dy \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow C_1^2 \frac{ab}{4} \stackrel{!}{=} 1 \quad C_1 = \frac{2}{\sqrt{ab}} \right]$$

$\lambda_{k,l} = \nu^2 + \mu^2 \quad \nu = \frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{a} \quad \mu = \frac{2l-1}{2} \frac{\pi}{b}$
 $= \frac{\pi^2}{4} \left(\left(\frac{2k-1}{a} \right)^2 + \left(\frac{2l-1}{b} \right)^2 \right)$

$q(x,y) = \sum_{k,l} \beta_{k,l} \varphi_{k,l}(x,y)$

$\beta_{k,l} = \iint \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) \varphi_{k,l}(x,y) dx dy$ *Einsatz!*
 $= \int_0^a \int_0^b \frac{16 \sqrt{ab}}{\pi^3 (2k-1)(2l-1)} \left(\frac{(-1)^k}{2k-1} + \frac{(-1)^l}{2l-1} \right)$

$\frac{2}{\sqrt{ab}} \iint \frac{x}{a} \sin(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{a} x) \sin(\frac{2l-1}{2} \frac{\pi}{b} y) dx dy$
 $= \frac{2}{\sqrt{ab}} \int_0^a \frac{x}{a} \sin(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{a} x) dx \int_0^b \sin(\frac{2l-1}{2} \frac{\pi}{b} y) dy$

$= \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(-\frac{4a}{\pi^2 (2k-1)^2} \right) \left(\frac{2b}{(2l-1)\pi} \right) = -\frac{16 \sqrt{ab}}{\pi^3 (2k-1)^2 (2l-1)} (-1)^k$

Analog für $\int_0^b \int_0^a y \varphi_{k,l} dx dy \dots$

2.2

$u(x,y) = \sum \alpha_{k,l} \varphi_{k,l}(x,y)$

$\Delta u + q = 0 \Rightarrow \sum (-\lambda_{k,l} \alpha_{k,l} + \beta_{k,l}) \varphi_{k,l} = 0$

$\alpha_{k,l} = \frac{\beta_{k,l}}{\lambda_{k,l}}$

$u(x,y) = - \sum \frac{16 \sqrt{ab}}{\pi^3 (2k-1)(2l-1) \lambda_{k,l}} \left(\frac{(-1)^k}{2k-1} + \frac{(-1)^l}{2l-1} \right) \sin(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{a} x) \sin(\frac{2l-1}{2} \frac{\pi}{b} y)$

③

3.1

$$u_t = D u_{xx} + a \frac{x}{L} e^{-t}$$

$$u_x(0,t) = 0$$

$$u(L,t) = 1$$

$$u(x,0) = \frac{x}{L}$$

Homogenisieren $V(x,t) = u(x,t) - 1$

$$V_t = D V_{xx} + a \frac{x}{L} e^{-t}$$

$$V_x(0,t) = 0$$

$$V(L,t) = 0$$

$$V(x,0) = \frac{x}{L} - 1$$

Eigenfunktionen $\varphi'' + \lambda \varphi = 0$

$$\varphi'(0) = \varphi(L) = 0$$

$$\varphi_k(x) = c \cos\left(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{L} x\right), \quad k=1,2,\dots$$

$$\int_0^L \varphi_k(x) dx = 1 \Rightarrow c^2 \frac{L}{2} = 1 \quad c = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\lambda_k = \left(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{L}\right)^2$$

$$q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \varphi_k(x) \stackrel{!}{=} a \frac{x}{L} e^{-t}$$

$$\beta_k = \int_0^L a \frac{x}{L} e^{-t} \varphi_k(x) dx = a e^{-t} \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L x \cos\left(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{L} x\right) dx$$

$$\beta_k(t) = -a \sqrt{\frac{2}{L}} e^{-t} \frac{\pi (2k-1)(-1)^k + 2}{\pi^2 (2k-1)^2}$$

$$= -\tilde{\beta}_k e^{-t}$$

3.2

$$V(x,t) = \sum \alpha_k(t) \varphi_k(x)$$

$$V_t - D V_{xx} - q(x,t) = 0$$

$$\leadsto \sum (\alpha_k'(t) + D \lambda_k \alpha_k(t) - \beta_k(t)) \varphi_k(x) = 0$$

$$\leadsto \alpha_k'(t) = -D \lambda_k \alpha_k(t) + \beta_k(t) \quad \text{DGL für } \alpha_k$$

$$\alpha_k(t) = \alpha_k(0) e^{-D \lambda_k t} - \tilde{\alpha} \beta_k \int_0^t e^{-D \lambda_k(t-\tau)} e^{-\tau} d\tau$$

$$= \alpha_k(0) e^{-D \lambda_k t} - \tilde{\alpha} \beta_k \frac{e^{-D \lambda_k t} \int_0^t e^{D \lambda_k \tau} d\tau}{e^{D \lambda_k t} - 1} \stackrel{!}{=} \frac{D \lambda_k - 1}{D \lambda_k - 1}$$

$$\alpha_k(t) = \alpha_k(0) e^{-D \lambda_k t} - \tilde{\alpha} \beta_k \frac{e^{-t} - e^{-D \lambda_k t}}{D \lambda_k - 1}$$

$$V(x,0) = \sum \alpha_k(0) \varphi_k(x) \stackrel{!}{=} \frac{x}{L} - 1$$

$$\alpha_k(0) = \int_0^L \left(\frac{x}{L} - 1\right) \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{L} x\right) dx \int_0^L \left(\frac{x}{L} - 1\right) \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{L} x\right) dx$$

$$= -\tilde{\beta}_k - \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \cos\left(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{L} x\right) dx = -\tilde{\beta}_k + \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{(-1)^k}{\pi (2k-1)}$$

$$= -4\sqrt{\frac{2}{L}} \frac{1}{\pi^2 (2k-1)^2}$$

3.3

$$u(x,t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \varphi_k(x)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{-4\sqrt{L}}{\pi^2(2k-1)^2} e^{-D_k t} - 2\sqrt{L} \left(\frac{(-1)^k}{\pi^2(2k-1)^2} + \frac{2}{\pi^2(2k-1)^2} \right) a \frac{e^{-t} - e^{-D_k t}}{D_k - 1} \right] \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{L} x\right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x,t) = 1$$

folgt auch aus $u_{xx} = 0 \Rightarrow u = ax + b$
 $u(0) = 0 \Rightarrow a = 0$
 $u(L) = 1 \Rightarrow b = 1$

4

Zerlegung in 2 Probleme

4.7

$$u(x,y,t) = u^{(u)}(x,t) + u^{(v)}(x,t)$$

(i) $u_t^{(u)} = D u_{xx}^{(u)}$	$x \in (0, \infty)$	(ii) $u_t^{(v)} = D u_{yy}^{(v)}$	$y \in (0, d)$
$u_x^{(u)}(0,t) = 0$		$u^{(v)}(0,t) = u^{(u)}(d,t) = 0$	
$u^{(u)}(x,0) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq L \\ 0 & x > L \end{cases}$		$u^{(v)}(y,0) = 1$	

(i) Spiegeln der AB $u^{(u)}(x,0) = \begin{cases} 1 & -L \leq x \leq L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
auf $x \in (-\infty, \infty)$

$$u^{(u)}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} u^{(u)}(\xi,0) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-L}^L e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi$$

$$= \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+L}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-L}{\sqrt{4Dt}}\right) \right]$$

(ii) Eigenfunktionen $\Delta \varphi'' + \lambda \varphi = 0$

$$\varphi(0) = \varphi(d) = 0$$

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{d}} \sin\left(\frac{k\pi}{d} x\right) \quad \int_0^d \varphi_k^2 dx = 1 \Rightarrow \zeta = \sqrt{\frac{2}{d}}$$

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{d}\right)^2 \quad k = 1, 2, \dots$$

keine Quelle

2. Vordiplom

Wichtige Hinweise

- Hilfsmittel: 20 A4-Seiten Zusammenfassung und Formelsammlung, kein Taschenrechner.
- Zeit: 2 Stunden.

1. (7 Punkte) Es sei Ω das Quadrat $(0, \pi) \times (0, \pi)$ und

$$q(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Lösung des Problems

$$\Delta u + q(x, y) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Wie gross ist angenähert der Wert von u bei $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$?

2. (9 Punkte) Gegeben ist Ω eine Kugel mit Radius R und das Diffusionsproblem

$$\partial_t u = D \Delta u \quad x \in \Omega, t > 0$$

$$u(R, t) = u_R$$

$$u(r, 0) = u_0$$

mit Konstanten u_R und u_0 . Berechnen Sie Lösung $u(r, t)$.

3. (8 Punkte) Berechnen Sie die Lösung der Diffusions-Reaktionsgleichung

$$\Delta u - c^2 u = 0 \quad \text{im Rechteck } (0, a) \times (0, b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{auf der Seite } y = b, 0 < x < a$$

$$u = 1 \quad \text{auf den restlichen Seiten}$$

4. (6 Punkte) In einem halbenendlichem Draht findet Wärmeleitung gemäß

$$u_t = D u_{xx} \quad \text{in } x \in (0, \infty)$$

$$u(0, t) = 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

statt. Wie gross ist der Diffusionsfluss $j = -D \frac{\partial u}{\partial x}$ bei $x = 0$?

Viel Erfolg !!!

4.2

Ansatz $u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \varphi_k(y)$

einsetzen: $u_t^{(x)} - D u_{yy}^{(x)} = 0$

$$\sum (\alpha_k' + D \lambda_k \alpha_k) \varphi_k = 0$$

$$\alpha_k'(t) = -D \lambda_k \alpha_k(t) \quad \alpha_k(t) = \alpha_k(0) e^{-D \lambda_k t}$$

AB $u^{(x)}(y, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(0) \varphi_k(y) \stackrel{!}{=} 1$

$$\alpha_k(0) = \int_0^d \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{d} y\right) dy$$

$$= \frac{\sqrt{2d}}{\sqrt{\lambda} \pi} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2d}}{\sqrt{\lambda} \pi} & k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eingesetzt
 $u^{(x)}(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{2d}}{\sqrt{\lambda} \pi} e^{-D \lambda_k t} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{d} y\right)$

$$u(x, y, t) = \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+L}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-L}{\sqrt{4Dt}}\right) \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\lambda} \pi} e^{-\frac{D \lambda_k^2}{d^2} t} \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{d} y\right)$$