

2. Vordiplom

Wichtige Hinweise

- Hilfsmittel: 20 A4-Seiten Zusammenfassung und Formelsammlung, kein Taschenrechner.
- Zeit: 2 Stunden.

1. (7 Punkte) Es sei Ω das Quadrat $(0, \pi) \times (0, \pi)$ und

$$q(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \Delta u + q(x, y) &= 0 & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Wie gross ist angenähert der Wert von u bei $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$?

2. (9 Punkte) Gegeben ist Ω eine Kugel mit Radius R und das Diffusionsproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u &= D \Delta u & x \in \Omega, t > 0 \\ u(R, t) &= u_R \\ u(r, 0) &= u_0 \end{aligned}$$

mit Konstanten u_R und u_0 . Berechnen Sie Lösung $u(r, t)$.

3. (8 Punkte) Berechnen Sie die Lösung der Diffusions-Reaktionsgleichung

$$\begin{aligned} \Delta u - c^2 u &= 0 & \text{im Rechteck } (0, a) \times (0, b) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 & \text{auf der Seite } y = b, 0 < x < a \\ u &= 1 & \text{auf den restlichen Seiten} \end{aligned}$$

4. (6 Punkte) In einem halbunendlichem Draht findet Wärmeleitung gemäß

$$\begin{aligned} u_t &= D u_{xx} & \text{in } x \in (0, \infty) \\ u(0, t) &= 0 \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

statt. Wie gross ist der Diffusionsfluss $j = -D \frac{\partial u}{\partial x}$ bei $x = 0$?

Viel Erfolg !!!

4.2

Ansatz $u^{(1)}(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \varphi_k(y)$

einsetzen: $u_t^{(1)} - D u_{yy}^{(1)} = 0$

$$\sum (\alpha_k' + D \lambda_k \alpha_k) \varphi_k = 0$$

$$\alpha_k'(t) = -D \lambda_k \alpha_k(t) \quad \alpha_k(t) = \alpha_k(0) e^{-D \lambda_k t}$$

AB $u^{(1)}(y, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(0) \varphi_k(y) \stackrel{!}{=} 1$

$$\alpha_k(0) = \int_0^d \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{d} y\right) dy$$

$$= \frac{\sqrt{2d}}{\sqrt{\lambda} \pi} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2d}}{\sqrt{\lambda} \pi} & k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$u^{(1)}(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{2d}}{\sqrt{\lambda} \pi} e^{-D \lambda_k t} \frac{\sqrt{2}}{d} \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{d} y\right)$$

$$u(x, y, t) = \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+L}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-L}{\sqrt{4Dt}}\right) \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\lambda} \pi} e^{-\frac{D \lambda_k^2}{d^2} t} \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{d} y\right)$$

1) $\Omega = (0, \pi)^2$

$\Delta u + q(x, y) = 0 \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$

Eigenfunktionen/werte $\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 \Rightarrow$
 $\varphi = 0 \text{ auf } \partial\Omega$

$\varphi(x, y) = X(x)Y(y)$
 $X(0) = X(\pi) = 0$
 $Y(0) = Y(\pi) = 0$
 $\Rightarrow \varphi_{k,l} = C \sin(kx) \sin(ly) \quad C = \frac{2}{\pi}$
 $\lambda_{k,l} = \pi^2(k^2 + l^2) \quad k, l = 1, 2, \dots$

Quelle entwickeln $q(x, y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \beta_{k,l} \varphi_{k,l}(x, y)$

$\beta_{k,l} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(kx) \sin(ly) dx dy$

$= \frac{2}{\pi} \frac{(1 - \cos(\frac{k\pi}{2}))(1 - \cos(\frac{l\pi}{2}))}{kl}$
 $\cos(\frac{k\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & k \text{ ungerade} \\ (-1)^{\frac{k}{2}} & \text{sonst} \end{cases}$

Ansatz $u(x, y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{k,l} \varphi_{k,l}(x, y)$

$\Rightarrow \alpha_{k,l} = \frac{\beta_{k,l}}{\lambda_{k,l}}$
 $u(x, y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2} \frac{(1 - \cos(\frac{k\pi}{2}))(1 - \cos(\frac{l\pi}{2}))}{(k^2 + l^2)kl} \sin(kx) \sin(ly)$

$u(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \sum_{k,l=1}^{\infty} 4 \frac{(1 - \cos(\frac{k\pi}{2}))(1 - \cos(\frac{l\pi}{2}))}{\pi^2(k^2 + l^2)kl} \sin(-1) \sin(-1) = \sum_{k,l \text{ ungerade}} \frac{4(-1)^{\frac{k-1}{2}}(-1)^{\frac{l-1}{2}}}{\pi^2(k^2 + l^2)kl}$

$\approx \frac{2}{\pi^2} - \frac{8}{\pi^2 30} = \frac{26}{15\pi^2}$
 $k=1 \quad l=1$
 $k=1 \quad l=3$
 $k=3 \quad l=1$

2)

Homogenisieren $u(r, t) = V(r, t) + u_R \Rightarrow$ Kugel mit R

$\Rightarrow \partial_t V = D \Delta V$

$V(R, t) = 0$

$V(r, 0) = \frac{u_0}{R} - u_R$

Eigenfunktionen/werte $\frac{1}{r^2}(r^2\varphi_r)_r + \lambda\varphi = 0$
 $\varphi(r) = \frac{f(r)}{r} \quad \varphi(0) < \infty \Rightarrow \varphi_k(r) = C \frac{\sin(\frac{\sqrt{\lambda_k} r}{R})}{r} \quad C = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$
 $\lambda_k = (\frac{k\pi}{R})^2 \quad k = 1, 2, \dots$

Ansatz $V(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \varphi_k(r)$

$\Rightarrow \alpha_k' = -\lambda_k \alpha_k \quad \alpha_k(t) = \alpha_k(0) e^{-\lambda_k t}$

AB $V(r, 0) = \frac{u_0}{R} - u_R = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(0) \varphi_k(r)$

$\alpha_k(0) = 4\pi \int_0^R \left(\frac{u_0 - u_R}{R} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \frac{\sin(\frac{\sqrt{\lambda_k} r}{R})}{r} r^2 dr$
 $= 2\pi (u_0 - u_R) \sqrt{\frac{2\pi}{R}} \int_0^R \sin(\frac{\sqrt{\lambda_k} r}{R}) dr$
 $= -\frac{2(u_0 - u_R)}{k\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{R}} R^2 (-1)^k$

$u(r, t) = u_R + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(u_0 - u_R)R}{k\pi} (-1)^k e^{-(\frac{k\pi}{R})^2 Dt} \frac{\sin(\frac{k\pi r}{R})}{r}$

3) Homogenisieren: $u(x,y) = V(x,y) + 1$, $\Omega = (0,a) \times (0,b)$

$$\Rightarrow \Delta V + c^2 V + c^2 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad y=b, x \text{ bel.}$$

$$V = 0 \quad \text{sonst}$$

Eigenfunktionen/werte: $\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0$

$\varphi(x,y) = X(x)Y(y)$ + RB wie oben

$$\left. \begin{aligned} X(0) = X(a) = 0 \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{aligned} \right\} \varphi_{k,l} = C \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b}y\right) \quad C = \frac{2}{\sqrt{ab}}$$

$$\lambda_{k,l} = \pi^2 \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \quad k=1,2,3,\dots$$

$$l=1,3,5,\dots$$

Quelle entwickeln: $c^2 = \sum_{k,l=1}^{\infty} \beta_{k,l} \varphi_{k,l}(x,y)$

$$\beta_{k,l} = \frac{2}{\sqrt{ab}} c^2 \iint_{\Omega} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b}y\right) dx dy$$

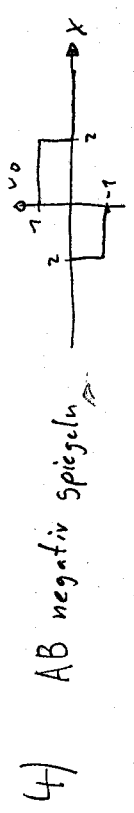
$$= \frac{2c^2}{\sqrt{ab}} \frac{a(1-\cos(k\pi))}{k\pi} \frac{b(1-\cos(l\pi))}{l\pi} = c^2 \frac{4\sqrt{ab}}{kl\pi^2} (1-(-1)^k)(1-\cos(\frac{l\pi}{b}))$$

Ausatz $V(x,y) = \sum_{k,l} \alpha_{k,l} \varphi_{k,l}(x,y)$ l ungerade

$\Rightarrow (\lambda_{k,l} + c^2) \alpha_{k,l} = \beta_{k,l}$

$$u(x,y) = 1 + \sum_{\substack{k,l=1 \\ l \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{4c^2\sqrt{ab}(1-(-1)^k)}{kl\pi^2(\pi^2(\frac{a^2}{b^2} + \frac{l^2}{b^2}) + c^2)} \frac{(2)}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b}y\right)$$

$$= 1 + \sum_{\substack{k,l=1 \\ k,l \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{4c^2}{kl\pi^2(\pi^2(\frac{a^2}{b^2} + \frac{l^2}{b^2}) + c^2)} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b}y\right)$$



Lösungsformel

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4Dt}} ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \left(\int_0^1 e^{-\frac{(x-s)^2}{4Dt}} ds + \int_1^2 e^{-\frac{(x-s)^2}{4Dt}} ds \right)$$

mit $\int_a^b e^{-\frac{(x-s)^2}{4Dt}} ds = \sqrt{\pi Dt} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-b}{\sqrt{4Dt}}\right) \right)$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left(-\operatorname{erf}\left(\frac{x-2}{\sqrt{4Dt}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{\sqrt{4Dt}}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\operatorname{erf}\left(\frac{x-2}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-2}{\sqrt{4Dt}}\right) + 2 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \right)$$

$$j = -D \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{D}{\sqrt{\pi Dt}} \left(-e^{-\frac{(x-2)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x-1)^2}{4Dt}} \right) \Big|_{x=0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} (2 - 2e^{-\frac{4}{4Dt}})$$

$$= -\frac{D}{\sqrt{\pi Dt}} (1 - e^{-\frac{4}{Dt}})$$