

2. Vordiplom

Wichtige Hinweise

- Hilfsmittel: Vorlesungsunterlagen und Formelsammlung
- Zeit: 2 Stunden.

1. (7 Punkte) Die stationäre Temperaturverteilung in einer Kugelschale Ω mit $R \leq r \leq 2R$ wird beschrieben durch

$$\Delta u + q_0 \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad r = R$$

$$u = 0 \quad r = 2R$$

- a) Finden Sie den Maximalwert von u .
b) Berechnen Sie den Wärmehalt $E = \int_{\Omega} u dV$

2. (8 Punkte) In einem Quadrat $\Omega = (0, a) \times (0, a)$ findet Diffusion und Reaktion statt, welche durch folgendes Anfangs-Randwertproblem beschrieben wird.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u - cu \quad \text{in } \Omega$$

$$u = 1 \quad \text{auf } \partial \Omega$$

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Gesucht ist eine Reihe für den Wert im Mittelpunkt von Ω .

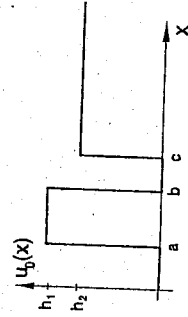
3. (7 Punkte) In einem halb-unendlichem Draht $\Omega = (0, \infty)$ findet Wärmeleitung gemäß

$$u_t = Du_{xx} \quad \text{in } \Omega$$

$$u(0, t) = 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

statt. Dabei ist die Anfangsbedingung u_0 durch folgende Verteilung gegeben.



Geben Sie den Diffusionsfluss $j(0, t) = -Du_x(0, t)$ an.

4. (8 Punkte) Es sei Ω das Intervall $(0, a)$. Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung mit Wärmequelle

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u + q_0 \left(\frac{x}{a} + e^{-at}\right) \quad \text{in } \Omega \quad t > 0$$

$$u = 0 \quad \text{für } x = 0, x = a$$

$$u(x, 0) = 0$$

Berechnen Sie anschließend $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$.

Viel Erfolg !!!

①

radialsymmetrisch: $\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r$

$$(r^2 u_r)_r = -q_0 \left(r^2 + \frac{r^4}{R^2} \right)$$

$$r^2 u_r = -q_0 \left(\frac{1}{3} r^3 + \frac{1}{5} \frac{r^5}{R^2} \right) + C_1$$

$$u_r = -q_0 \left(\frac{1}{3} r + \frac{1}{5} \frac{r^3}{R^2} \right) + \frac{C_1}{r^2}$$

$$u = -q_0 \left(\frac{1}{6} r^2 + \frac{1}{20} \frac{r^4}{R^2} \right) - \frac{C_1}{r} + C_2$$

Randbedingungen: $u_r(R) = 0$ $u(2R) = 0$

$$u_r(R) = -q_0 \left(\frac{1}{3} R + \frac{1}{5} \frac{R^3}{R^2} \right) + \frac{C_1}{R^2} = 0$$

$$q_0 \frac{8}{15} R^3 = C_1$$

$$u(2R) = -q_0 \left(\frac{1}{6} 4R^2 + \frac{1}{20} \frac{16R^4}{R^2} + \frac{8}{15} \frac{1}{R^2} R^2 \right) + C_2 = 0$$

$$q_0 \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{4}{15} \right) R^2 = C_2$$

$$\frac{26}{15} q_0 R^2 = C_2$$

$$\Rightarrow u(r) = -q_0 \left(\frac{1}{6} r^2 + \frac{1}{20} \frac{r^4}{R^2} + \frac{8}{15} \frac{R^3}{r} - \frac{26}{15} \frac{R^2}{r} \right)$$

(a) Maximum ist bei $r=R$

$$u_{max} = u(R) = -q_0 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \frac{8}{15} - \frac{26}{15} \right) R^2$$

$$\frac{1}{2} \rightarrow = q_0 R^2 \frac{59}{60}$$

$$(b) E = \int_{\Omega} u dV = 4\pi \int_0^{2R} u(r) r^2 dr$$

$$= -4\pi q_0 \left(\frac{1}{6} r^2 + \frac{1}{20} \frac{r^4}{R^2} + \frac{8}{15} \frac{R^3}{r} - \frac{26}{15} \frac{R^2}{r} \right) \Big|_0^{2R}$$

$$= -4\pi q_0 \left(\frac{1}{30} r^3 + \frac{1}{110} \frac{r^5}{R^2} + \frac{8}{30} R^3 r^2 - \frac{26}{45} R^2 r \right) \Big|_0^{2R}$$

$$= -4\pi q_0 \left(\frac{32}{30} - \frac{1}{30} + \frac{128}{140} - \frac{1}{140} + \frac{32}{30} - \frac{8}{30} - \frac{208}{45} + \frac{26}{45} \right) R^5$$

$$= -4\pi q_0 R^5 \left(\frac{58}{30} + \frac{127}{140} - \frac{182}{45} \right) = -\frac{7643}{375} \pi q_0 R^5$$

②

$$u_t = D \Delta u - c u \quad \text{in } \Omega$$

$$u = 1 \quad \text{auf } \partial \Omega$$

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{a}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$v + 1 = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{auf } \partial \Omega$$

Homogenisieren: $v := u - 1 \Leftrightarrow u = v + 1$

$$v|_{\partial \Omega} = u|_{\partial \Omega} - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} v_t &= D \Delta v - c v - c \\ v &= 0 \quad \text{auf } \partial \Omega \\ v(x, y, 0) &= \begin{cases} 0, & 0 < x < \frac{a}{2} \\ -1, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Eigenfunktionen: $\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0 \quad \text{in } \Omega$

$$\varphi = 0 \quad \text{auf } \partial \Omega$$

$$\varphi(x, y) = X(x) Y(y) \quad X(0) = X(a) = Y(0) = Y(b) = 0$$

$$\varphi_{k,l}(x, y) = \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b} y\right) \quad \lambda_{k,l} = \frac{\pi^2}{a^2} (k^2 + l^2)$$

$$\int_0^a \int_0^b \varphi_{k,l}^2(x, y) dx dy = 1 \Rightarrow C_{k,l} = \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

Quelle:

$$-c = \sum_{k,l} \beta_{k,l} \varphi_{k,l}(x, y)$$

Verzichten
auf Homogenität!

$$\text{mit } \beta_{k,l} = \int_0^a \int_0^b (-c) \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b} y\right) dx dy$$

$$= (-c) \frac{2}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) dx \int_0^b \sin\left(\frac{l\pi}{b} y\right) dy$$

$$= (-c) \cdot \begin{cases} \frac{2a}{k\pi} & k, l \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(2) Fortsetzung

Ansatz: $V(x, y, t) = \sum_{k, l} \alpha_{k, l}(t) \varphi_{k, l}(x, y)$

$\Rightarrow \sum_{k, l} (\alpha'_{k, l} + D \lambda_{k, l} \alpha_{k, l} + C \alpha_{k, l} - \beta_{k, l}) \varphi_{k, l} = 0$

$\alpha'_{k, l} = -(D \lambda_{k, l} + C) \alpha_{k, l} + \beta_{k, l}$

$\alpha'_{k, l}(t) = \alpha_{k, l}(0) e^{-(D \lambda_{k, l} + C)t} + \frac{\beta_{k, l}}{D \lambda_{k, l} + C}$

Anfangswert: $\sum_{k, l} \alpha_{k, l}(0) \varphi_{k, l}(x, y) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{a}{2} \\ -1 & \frac{a}{2} < x < a \end{cases} = V(x, y, 0)$

$\alpha_{k, l}(0) = \iint_{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b} V(x, y, 0) \varphi_{k, l}(x, y) dx dy$

$= -\frac{2}{a} \int_{\frac{a}{2}}^a \sin(\frac{k\pi}{a} x) dx \int_0^b \sin(\frac{l\pi}{b} y) dy$

$= -\frac{4a}{k\pi^2} (\cos(\frac{k\pi}{2}) - (-1)^k) \cdot 2 \sin(\frac{l\pi}{2}) \cdot D \sin(\frac{l\pi}{2})$

$\Rightarrow \alpha_{k, l}(0) = \frac{4a}{k\pi^2} (1 - (-1)^k) \sin(\frac{l\pi}{2}) \Rightarrow \alpha_{k, l}(0) = \frac{8a}{k\pi^2} \sin(\frac{l\pi}{2})$

$\alpha_{k, l}(t) = \alpha_{k, l}(0) e^{-(D \lambda_{k, l} + C)t} + \frac{\beta_{k, l}}{D \lambda_{k, l} + C} (1 - e^{-(D \lambda_{k, l} + C)t})$

Reihe in Mittelpunkt: $u(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t) = 1 + V(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t)$

$= 1 + \sum_{k, l \text{ ungerade}} \alpha_{k, l}(t) (-1)^k (-1)^l$

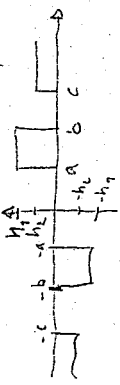
$\alpha_{k, l}(t) = e^{-(D \lambda_{k, l} + C)t} \left[\alpha_{k, l}(0) - \frac{\beta_{k, l}}{D \lambda_{k, l} + C} \right] + \frac{\beta_{k, l}}{D \lambda_{k, l} + C}$

(3) Wegen $u(x, 0) = 0$ ist das Problem äquivalent zu

$u_t = Du_{xx}$ auf R

Spiegel

$u(x, 0) = \tilde{u}_0(x)$



$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4Dt}} ds$

$= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \left(-h_2 \int_{-\infty}^{-b} e^{-ds} ds - h_1 \int_{-b}^a e^{-ds} ds + h_1 \int_a^{\infty} e^{-ds} ds \right)$

Rechnung
Ergebnis

mit $\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_a^{\infty} e^{-ds} ds = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-b}{\sqrt{4Dt}}\right) \right) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-a}{\sqrt{4Dt}}}^{\frac{x-b}{\sqrt{4Dt}}} e^{-s^2} ds$
und $\operatorname{erf}(\pm\infty) = \pm 1$

$= \frac{1}{2} \left[-h_2 \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x+b}{\sqrt{4Dt}}\right) \right) - h_1 \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x+b}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{\sqrt{4Dt}}\right) \right) + h_2 \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x-c}{\sqrt{4Dt}}\right) + 1 \right) + h_1 \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-b}{\sqrt{4Dt}}\right) \right) \right]$

$= \frac{1}{2} \left[h_2 \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x-c}{\sqrt{4Dt}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x+a}{\sqrt{4Dt}}\right) \right) + h_1 \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{\sqrt{4Dt}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x+b}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-b}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x+a}{\sqrt{4Dt}}\right) \right) \right]$

Diffusionsfluss: $j = -Du_x|_{x=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$

$j_0(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \left[h_2 \left(e^{-\frac{c^2}{4Dt}} + e^{-\frac{a^2}{4Dt}} \right) + h_1 \left(e^{-\frac{a^2}{4Dt}} + e^{-\frac{b^2}{4Dt}} - e^{-\frac{a^2}{4Dt}} - e^{-\frac{b^2}{4Dt}} \right) \right]$

Alternative mit gespiegeltem Kern

$\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_0(s) \left(e^{-\frac{(x-s)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x+s)^2}{4Dt}} \right) ds$

④

$$u_x = D u_{xx} + q_0 \left(\frac{x}{a} + e^{-x\epsilon} \right)$$

$$u(x, 0) = u(x, \tau) = 0$$

$$u(x, 0) = 0$$

Eigenfunktionen $\varphi_{xx} + \lambda \varphi = 0$ $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$

$$\varphi_k = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) \quad \lambda_k = -\pi^2 \frac{k^2}{a^2}$$

Quelle entwickeln: $q_0 \left(\frac{x}{a} + e^{-x\epsilon} \right) = \sum_k \beta_k \varphi_k(x)$

mit $\beta_k = q_0 \int_0^a \left(\frac{x}{a} + e^{-x\epsilon} \right) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) dx$

$$= q_0 \sqrt{\frac{2}{a}} \left[\int_0^a \frac{x}{a} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) dx + \int_0^a e^{-x\epsilon} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) dx \right]$$

- $(-1)^k \frac{k\pi}{a} \frac{1}{k\pi}$ - $\frac{2a}{k\pi}$ Kugende

$$q_0 \sqrt{\frac{2}{a}} \left((-1)^k + e^{-a\epsilon} (-1)^k \right) = \begin{cases} q_0 \frac{\sqrt{2a}}{k\pi} 2e^{-a\epsilon} + 1 & \text{Kugende} \\ -q_0 \frac{\sqrt{2a}}{k\pi} & \text{Sinst} \end{cases}$$

Ansatz: $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right)$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k' + D \lambda_k \alpha_k - \beta_k) \varphi_k(x) = 0$$

$$\alpha_k'(t) = -D \lambda_k \alpha_k(t) + \beta_k(t)$$

$$\Rightarrow \alpha_k(t) = \alpha_k(0) e^{-D \lambda_k t} + \int_0^t \beta_k(\tau) e^{-D \lambda_k(t-\tau)} d\tau$$

Anfangsbed: $u(x, 0) = \sum \alpha_k(0) \varphi_k(x) = 0$

$$\Rightarrow \alpha_k(0) = 0 \quad \text{A.L.}$$

④ Fortsetzung

K gerade $\alpha_k(t) = \int_0^t q_0 \frac{\sqrt{2a}}{k\pi} e^{-D \lambda_k \tau} e^{-D \lambda_k t} d\tau$

$$= -q_0 \frac{\sqrt{2a}}{k\pi} \frac{1}{D \lambda_k} (1 - e^{-D \lambda_k t})$$

Kugende $\alpha_k(t) = q_0 \frac{\sqrt{2a}}{k\pi} \int_0^t (e^{-x\epsilon} + 1) e^{-D \lambda_k \tau} e^{-D \lambda_k t} d\tau$

$$= q_0 \frac{\sqrt{2a}}{k\pi} \left[\frac{1}{D \lambda_k} (1 - e^{-D \lambda_k t}) + \frac{2}{D \lambda_k - \epsilon} (e^{-\epsilon t} - e^{-D \lambda_k t}) \right]$$

Limit: $\alpha_k(t \rightarrow \infty) = -q_0 \frac{\sqrt{2a}}{k\pi} (-1)^k \frac{1}{D \lambda_k}$

$$= -q_0 \frac{\sqrt{2a}}{k\pi} (-1)^k \frac{a^2}{D \pi^2 k^2}$$

$$u(x, t \rightarrow \infty) = -\sum q_0 \frac{\sqrt{2a} a^2}{D \pi^3 \pi^3} (-1)^k \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right)$$

$$= -\sum q_0 (-1)^k \frac{2a^2}{D \pi^3 \pi^3} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right)$$

$$= -\frac{q_0}{6Da} (x^2 - \tau)x \quad \text{folgt aus } D u_{xx} + q_0 \frac{x}{a} = 0$$

$$u_{xx} = -\frac{q_0}{D} \frac{x}{a} + RB$$

Kernel-Formel $u(x, t) = \int_0^a \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{a} \tau\right) e^{-D \lambda_k(t-\tau)} q(\tau, \tau) d\tau d\epsilon$

① für Eigenwerte/funktionen
② für DGL/Entwicklung
③ AB