2. Vordiplom in Analysis III

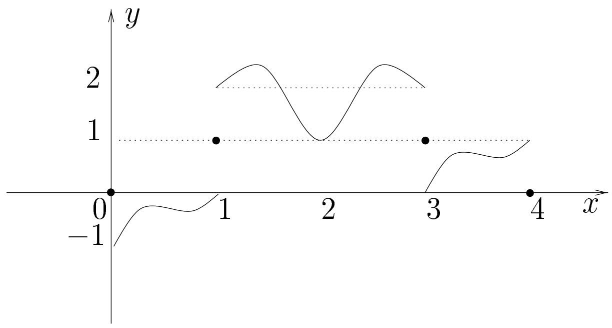
(zweistündige Prüfung)

- *Erlaubte Hilfsmittel:* Handgeschriebene Zusammenfassung von 10 A4-Blättern.
- Alle Resultate sind zu begründen.
- Alle Aufgaben werden gleich bewertet (6 Punkte).
- Verwenden Sie bitte für jede Aufgabe eine neue Seite, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.

1. Jede der folgenden Aussagen ist entweder wahr oder falsch. Kreuzen Sie **ohne Begründung** an, was Sie für richtig halten.

Korrekturschema : 1/2 Punkt für jede richtige Antwort,
-1/2 Punkt für jede falsche Antwort,
0 Punkte für jede unbeantwortete Frage.

	WAHR	FALSCH
a) Die Funktion $f(x) = (e^x + e^{-x}) \cdot \sin(x^2)$ ist gerade.		
b) Ist eine gerade Funktion f π-periodisch, so ist auch $\frac{2}{3}f(-x) + f(\sin x)$ π-periodisch.		
Sei $g(x) = 1 + \cos(\sin(\frac{\pi}{2}x))$. c) g ist ungerade.		
d) g hat Periode -2.		

	WAHR	FALSCH
Sei $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ die folgende Funktion:  e) Die Funktion $x \mapsto f(x+2)$, $-2 \leq x \leq 2$, ist gerade.		
f) Die 4-periodische Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}$ ist ungerade.		
Es gibt Koeffizienten A_n, B_n so, dass für alle $0 < x < 1$ g) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x)$.		
h) $f(x+2) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi x)$.		
i) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(2n\pi x)$.		
j) $f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi x) + B_n \sin(2n\pi x)$.		
Es gibt Koeffizienten A_n, B_n so, dass für alle $0 < x < 4$ k) $f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\frac{\pi}{2}x) + B_n \sin(n\frac{\pi}{2}x)$.		
l) $f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\frac{2}{3}\pi x) + B_n \sin(n\frac{2}{3}\pi x)$.		

2. Sei α eine reelle Zahl und $u(x,y)$ die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = 0 & \text{auf der Einheitskreisscheibe } D \\ u(x,y) = 2\alpha x(1+y) + (\alpha-1)(3-x^2) & \text{auf dem Rand von } D \end{array}$$

Für welche α gilt $u(0,0) = 0$? Berechnen Sie für diese α das Maximum und das Minimum von u auf D.

3. Es sei G das Gebiet

$$\{(x,y)|0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

Lösen Sie das folgende Dirichlet-Problem:

$$\Delta u(x,y) = 0 \text{ in } G$$
$$\begin{cases} u(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ u(x,1) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,y) = \sin^3(2\pi y) & 0 \leq y \leq 1 \\ u(1,y) = 0 & 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

4. Betrachten Sie das folgende Anfangswertproblem

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$
$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ -1-x & -1 < x \leq 0 \\ 1-x & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x > 1. \end{cases}$$
$$u_t(x,0) = 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

Zeichnen Sie die Funktion $x \mapsto u(x,t)$ für $t = 0, 1, 2, 3$.