Prof. Dr. R. Sperb

Probe Prüfung

1.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -3kx_1 + 2kx_2 + d\\ \dot{x}_2 &= kx_1 - 2kx_2\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix}-3k & 2k\\ k & -2k\end{bmatrix}}^{=:A}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}d\\ 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

Laplace-Transformation:

$$d(t) = 1 - e^{-kt}$$

Mit Laplacetranformation $t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{p^{n+1}}$ und Verschiebungssatz: $L\left[e^{at} f(t)\right] = F(p-a)$ erhält man:

$$d(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{p} - \frac{1}{p+k} = \frac{k}{p(p+k)}$$

$$\begin{aligned} p\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{k}{p(p+k)}\\ 0\end{pmatrix}\\ \Rightarrow \underbrace{(pI - A)}_{B}\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{k}{p(p+k)}\\ 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix} &= B^{-1}\begin{pmatrix}\frac{k}{p(p+k)}\\ 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die Matrix B ist:

$$B = \begin{bmatrix}p+3k & -2k\\ -k & p+2k\end{bmatrix}$$

$(p+3k)\cdot(p+2k) - 2k^2$

$p^2 + 2kp + 3kp + 6k^2 - 2k^2$

$p^2 + 5kp + 4k^2$

und die Inverse ist:

$$B^{-1} = \frac{1}{\underbrace{p^2 + 5kp + 4k^2}_{(p+k)(p+4k)}}\begin{bmatrix}p+2k & 2k\\ k & p+3k\end{bmatrix}$$

Also für X_2 ergibt sich

$$X_2 = \frac{k^2}{p(p+4k)(p+k)^2}$$

Mit eine Partialbruchzerlegung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{k^2}{p(p+4k)(p+k)^2} &= \frac{A}{p} + \frac{B}{p+4k} + \frac{C}{p+k} + \frac{D}{(p+k)^2} \\
k^2 &= A(p+4k)(p+k)^2 + Bp(p+k)^2 + Cp(p+4k)(p+k) + Dp(p+4k) \\
k^2 &= A(p^3 + 6kp^2 + 9k^2p + 4k^3) + B(p^3 + 2kp^2 + k^2p) \\
&\quad + C(p^3 + 5kp^2 + 4k^2p) + D(p^2 + 4kp) \\
k^2 &= (A+B+C)p^3 + (6kA + 2kB + 5kC + D)p^2 \\
&\quad + (9k^2A + 2k^2B + 4k^2C + 4kD)p + 4k^3A
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 6kA + 2kB + 5kC + D = 0 \\ 9kA + kB + 4kC + 4D = 0 \\ 4k^3A = k^2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B + C = -\frac{1}{4k} \quad \Rightarrow \quad B = -C - \frac{1}{4k} \\ 2kB + 5kC + D = -\frac{3}{2} \\ kB + 4kC + 4D = -\frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3kC + D = -1 \quad \Rightarrow \quad D = -1 - 3kC \\ 3kC + 4D = -2 \end{cases}$$

$$-9kC = 2 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{2}{9k}$$

$$\frac{k^2}{p(p+4k)(p+k)^2} = \frac{1}{4kp} - \frac{1}{36k(p+4k)} - \frac{2}{9k(p+k)} - \frac{1}{3(p+k)^2}$$

Also

$$X_2(p) = \frac{1}{4kp} - \frac{1}{36k(p+4k)} - \frac{2}{9k(p+k)} - \frac{1}{3(p+k)^2}$$

Die Rücktranformierte für X_2 ist

$$x_2(t) = \frac{1}{4k} - \frac{1}{36k}e^{-4kt} - \frac{2}{9k}e^{-kt} - \frac{1}{3}te^{-kt}$$

Um die Lösung für $t \to \infty$ berechnen wir das System

$$\begin{cases} 0 = -3kx_1^\infty + 2kx_2^\infty + 1 \\ 0 = kx_1^\infty - 2kx_2^\infty \quad \Rightarrow \quad x_1^\infty = 2x_2^\infty \end{cases}$$

$$4kx_2^\infty = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2^\infty = \frac{1}{4k}$$

Die Gleichgewichtlösung ist $x_1^\infty = \frac{1}{2k}$, $x_2^\infty = \frac{1}{4k}$.

2. Gesucht sind als allererstes die Eigenfunktionen des Problems

$$\begin{cases} \Delta\phi + \lambda\phi = 0 & \text{in } \Omega \\ \phi = 0 & \text{in } \Gamma_0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 & \text{in } \Gamma_1 \end{cases}$$

Die ϕ sind

$$\phi_{k,l}\,(x,y) = C_l\,\sin\left(\frac{k\,\pi}{4}x\right)\cos\left(l\,\pi y\right)$$

mit $k = 1, 3, 5, \ldots$ und $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$.
Die Konstante berechnet sich aus der Normierung

$$\int_\Omega \phi_{k,l}^2 = 1 \quad \text{mit} \quad C_l^2 \int_0^1 \int_0^2 \sin^2\left(\frac{k\,\pi}{4}x\right)\cos^2\left(l\,\pi y\right)\,dx\,dy = \begin{cases} C_l^2 & l = 0 \\ C_l^2 \frac{1}{2} & l \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad C = \begin{cases} 1 & l = 0 \\ \sqrt{2} & l \neq 0 \end{cases}$$

und die Eigenwerte sind

$$\lambda_{k,l} = \frac{\pi^2}{16}\left(k^2 + 16 l^2\right)$$

Als nächstes wird die Quelle in eine Fourierreihe entwickelt. Es gilt

$$\cos(\pi x)\sin(\pi y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \beta_{k,l}\,\phi_{k,l}\,(x,y)$$

mit

$$\begin{aligned}
\beta_{k,l} &= \int_0^2 \int_0^1 \cos(\pi x)\sin(\pi y)\,\phi_{k,l}\,(x,y)\,dx\,dy \\
&= C_l \int_0^2 \cos(\pi x)\sin\left(\frac{k\,\pi}{4}x\right)dx \int_0^1 \sin(\pi y)\cos\left(l\,\pi y\right)dy \\
&= \left. -\frac{\cos(\pi\frac{k+4}{4}x)}{\pi(k+4)} - \frac{\cos(\pi\frac{k-4}{4}x)}{\pi(k-4)}\right|_0^2 \begin{cases} \left. -\frac{\cos(\pi y)}{\pi}\right|_0^1 & l = 0 \\ \left. \sqrt{2}\,\frac{\sin^2(\pi y)}{2\pi}\right|_0^1 & l = 1 \\ \sqrt{2}\left(\left. -\frac{\cos(\pi(1+l)y)}{2\pi(1+l)} - \frac{\cos(\pi(1-l)y)}{2\pi(1-l)}\right|_0^1\right) & sonst \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{8k}{\pi^2(k^2-4)} & l = 0 \\ \frac{8\sqrt{2}k}{\pi^2(k^2-4)(1-l^2)} & l \neq 0 \text{ und gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Für die Lösung u wird nun ein Reihenansatz gemacht

$$u\,(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{k,l}\,\phi_{k,l}\,(x,y)$$

wobei die Koeffizienten $\alpha_{k,l}$ zu bestimmen sind. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\alpha_{k,l}\,\phi_{k,l}(x,y)\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\beta_{k,l}\,\phi_{k,l}(x,y)&=0\\
\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\alpha_{k,l}\,\Delta\phi_{k,l}(x,y)+\beta_{k,l}\,\phi_{k,l}(x,y)\right)&=0\\
\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\alpha_{k,l}\,(-\lambda_{k,l})\,\phi_{k,l}(x,y)+\beta_{k,l}\,\phi_{k,l}(x,y)\right)&=0\\
\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left(-\alpha_{k,l}\,\lambda_{k,l}+\beta_{k,l}\right)\phi_{k,l}(x,y)&=0
\end{aligned}$$

Da die $\phi_{k,l}$ linear unabhängig sind müssen alle Koeffizienten einzeln verschwinden, also

$$-\alpha_{k,l}\,\lambda_{k,l}+\beta_{k,l}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_{k,l}=\frac{\beta_{k,l}}{\lambda_{k,l}}$$

und die Lösung ist

$$\begin{aligned}
u(x,y)=&\sum_{\substack{k=1\\ \text{ungerade}}}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\beta_{k,l}}{\lambda_{k,l}}\phi_{k,l}(x,y)\\
=&\frac{128}{\pi^4}\sum_{\substack{k=1\\ \text{ungerade}}}^{\infty}\frac{1}{k(k^2-4)}\sin(\frac{\pi k}{4}x)\\
&+\frac{256}{\pi^4}\sum_{\substack{k=1\\ \text{ungerade}}}^{\infty}\sum_{\substack{l=2\\ \text{gerade}}}^{\infty}\frac{k}{(k^2+16l^2)(k^2-4)(1-l^2)}\sin(\frac{\pi k}{4}x)\cos(\pi l x)
\end{aligned}$$

3. Zuerst soll man den Reaktiontermeliminieren

$$v(x,t)=u(x,t)e^{\gamma t}$$

Die Differentialgleichung für v wird:

$$\begin{aligned}
v_t&=\partial_t\left(ue^{\gamma t}\right)=(\partial_t u)e^{\gamma t}+\gamma ue^{\gamma t}=(Du_xx-\gamma u)e^{\gamma t}+\gamma ue^{\gamma t}=D(ue^{\gamma t})_xx\\
&=Dv_{xx}
\end{aligned}$$

und die Anfangsbedingung

$$v(x,0)=\underbrace{u(x,0)}_{x(x-L)}\underbrace{e^{\gamma 0}}_{=1}=x(x-L)$$

Das neue Problem wird

$$\begin{cases} v_t = Dv_{xx} & \text{in } (0,L) \\ v(0,t) = v(L,t) = 0 \\ v(x,0) = x(x-L) \end{cases}$$

Dur die Lösung der Eigenwertproblem

$$\begin{cases} \phi'' + \lambda = 0 & \text{in } (0,L) \\ \phi(0) = \phi(L) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \phi_k = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{\pi k}{L}x) \quad \lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{L^2}$$

Die Wärmeleitungskern ist

$$K(x,\xi,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x)\phi_k(\xi)e^{-D\lambda_k t} = \frac{2}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\sin(\frac{\pi k}{L}x)\sin(\frac{\pi k}{L}\xi)e^{-D\lambda_k t}$$

Dann die Lösung für v ist

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \int_0^L v(\xi,0)K(x,\xi,t)d\xi + \int_0^t\int_0^\pi q(\xi,\tau)K(x,\xi,t-\tau)d\xi d\tau \\ &= \int_0^L \xi(\xi-L)\frac{2}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\sin(\frac{\pi k}{L}x)\sin(\frac{\pi k}{L}\xi)e^{-D\lambda_k t}d\xi \\ &= \frac{2}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\sin(\frac{\pi k}{L}x)e^{-D\lambda_k t}\int_0^L \xi(\xi-L)\sin(\frac{\pi k}{L}\xi)d\xi \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \int_0^L \xi(\xi-L)\sin(\frac{\pi k}{L}\xi)d\xi &= \underbrace{-\frac{L}{\pi k}\xi(\xi-L)\cos(\frac{\pi k}{L}\xi)\Big|_0^L}_{=0} + \frac{L}{\pi k}\int_0^L(2\xi-L)\cos(\frac{\pi k}{L}\xi)d\xi \\ &= \underbrace{\frac{L^2}{\pi^2k^2}(2\xi-L)\sin(\frac{\pi k}{L}\xi)\Big|_0^L}_{=0} - \frac{2L^2}{\pi^2k^2}\int_0^L\sin(\frac{\pi k}{L}\xi)d\xi \\ &= -\frac{2L^3}{\pi^3k^3}\cos(\frac{\pi k}{L}\xi)\Big|_0^L = \begin{cases} \frac{4L^3}{\pi^3k^3} & k \text{ ungerade} \\ 0 & k \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

$$-\frac{2L^3}{\pi^3k^3}(\cos(k\pi)-1)$$

für v erhält man

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{2}{L}\sum_{\substack{k=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty}\sin(\frac{\pi k}{L}x)e^{-D\lambda_k t}\frac{4L^3}{\pi^3k^3} \\ &= \frac{8L^2}{\pi^3}\sum_{\substack{k=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty}\sin(\frac{\pi k}{L}x)e^{-D\lambda_k t} \end{aligned}$$

und für u

$$u(x,t) \;=\; v(x,t)e^{-\gamma t} = \frac{8L^2}{\pi^3} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \sin(\frac{\pi k}{L}x)e^{-(D\lambda_k+\gamma)t}$$

4. Man macht die Ansatz $u(x,y,t) = u_1(x,t)u_2(y,t)$ und erhält man

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial t}u_1 = D\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}u_2 + D\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}u_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0$$

und

$$\begin{aligned} u_y(x,0,t) = u_1(x,t)u_{2,y}(0,t) = 0 \quad &\Rightarrow \quad u_{2,y}(0,t) = 0 \\ u(x,L,t) = u_1(x,t)u_2(L,t) = 0 \quad &\Rightarrow \quad u_2(L,t) = 0 \\ u_x(0,y,t) = u_{1,x}(0,t)u_2(y,t) = 0 \quad &\Rightarrow \quad u_{1,x}(0,t) = 0 \end{aligned}$$

$$u(x,y,0) = u_1(x,0)u_2(y,0) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{L}y) & \text{für } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} u_1(x,0) &= \begin{cases} 1 & \text{für } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ u_2(y,0) &= \sin(\tfrac{\pi}{L}y) \end{aligned}$$

d.h erhält man zwei Teilprobleme

1.

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} & \text{in } (0,\infty) \\ u_{1,x}(0,t) = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} & \text{in } (0,L) \\ u_{2,y}(0,t) = u_2(L,t) = 0 \\ u(y,0) = \sin(\frac{\pi}{L}y) \end{cases}$$

Die zwei Lösungen sind

1. Zuerst erweitern wir der Aufgabe in $(-\infty,\infty)$. Um die Randbedingung $u_{1,x}(0,t) = 0$ machen wir eine Achsenspiegelung um x. In diesem Fall bekommen wir

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} & \text{in } (-\infty,\infty) \\ u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{für } -2 < x < -1 \text{ und } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

In die Vorlesung wurde gerechnet die Lösung von

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \quad \text{in } (-\infty, \infty)$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Die Lösung ist

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) \tag{1}$$

Wegen linearität kann man die Lösung von diesem Problem, um die Lösung für $u_1(x,t)$ zu berechnen. Man zwerlegt die Anfangsbedingung $u_1(x,0)$ mit die Stufefunktion

$$h(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

und die konstante Funktion, d.h

$$u_1(x,0) = Ah(x+2) + Bh(x+1) + Ch(x-1) + Dh(x-2) + E$$

Durch einsetzen uon verschidene x in diese gleichung erhälen wir die Koeffizienten A, B, C,D und E

$$\begin{aligned} x > 2 \quad &\Rightarrow \quad E = 0 \\ 1 < x < 2 \quad &\Rightarrow \quad D + E = 1 \quad \Rightarrow \quad D = 1 \\ -1 < x < 1 \quad &\Rightarrow \quad C + D + E = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -1 \\ -2 < x < -1 \quad &\Rightarrow \quad B + C + D + E = 1 \quad \Rightarrow \quad B = 1 \\ -2 > x \quad &\Rightarrow \quad A + B + C + D + E = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -1 \end{aligned}$$

So mit

$$u_1(x,0) = h(x-2) - h(x-1) + h(x+1) - h(x+2)$$

erhalten wir

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\left(\text{erfc}\left(\frac{x-2}{2\sqrt{Dt}}\right) - \text{erfc}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{Dt}}\right) + \text{erfc}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{Dt}}\right) - \text{erfc}\left(\frac{x+2}{2\sqrt{Dt}}\right)\right)$$

2. Um diese Problem zu Lösen soll man zuerst den EWP

$$\begin{cases} \phi'' + \lambda\phi = 0 \quad \text{in } (0,L) \\ \phi_y(0) = \phi(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \phi_k(y) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{\pi k}{2L}y\right) \\ \lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{4L^2} \quad \text{mit } k = 1,3,5... \end{array}$$

Lösen. Damit kann man die Wärmeleitungskern erhälten

$$\begin{aligned} K(y,\eta,t) &= \sum_{\substack{k=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \phi_k(y)\phi_k(\eta)e^{-D\lambda_k t} = \\ &= \frac{2}{L}\sum_{\substack{k=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi k}{2L}y\right)\cos\left(\frac{\pi k}{2L}\eta\right)e^{-D\frac{\pi^2 k^2}{4L^2}t} \end{aligned}$$

der man verwendet um u_2 zu berechnen

$$\begin{aligned} u_2(y,t) &= \int_0^L \underbrace{u_2(\eta,0)}_{=\sin(\frac{\pi}{L}\eta)} K(y,\eta,t)d\eta = \\ &= \frac{2}{L} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi k}{2L}y\right) e^{-D\frac{\pi^2 k^2}{4L^2}t} \int_0^L \sin(\frac{\pi}{L}\eta)\cos\left(\frac{\pi k}{2L}\eta\right) d\eta \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin(\frac{\pi}{L}\eta)\cos\left(\frac{\pi k}{2L}\eta\right) d\eta &= -\frac{L\cos(\frac{\pi}{2L}(2+k)\eta)}{\pi(2+k)} - \frac{L\cos(\frac{\pi}{2L}(2-k)\eta)}{\pi(2-k)}\Bigg|_0^L \\ &= \frac{L}{\pi(2+k)} + \frac{L}{\pi(2-k)} = \frac{4L}{\pi(4-k^2)} \end{aligned}$$

ehalten wir

$$u_2(y,t) = \frac{8}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi k}{2L}y\right) e^{-D\frac{\pi^2 k^2}{4L^2}t}}{4-k^2}$$

Die Lösung für u ist

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{erfc}\left(\frac{x-2}{2\sqrt{Dt}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{Dt}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{Dt}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{x+2}{2\sqrt{Dt}}\right)\right) \\ &\quad \times \left(\sum_{\substack{k=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi k}{2L}y\right) e^{-D\frac{\pi^2 k^2}{4L^2}t}}{4-k^2} \right) \end{aligned}$$