»õµ

$\sin^2(ax) \dots \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{a}\sin(2ax)\right)$
$\begin{cases} \ell = 0 & \dots \\ \ell = \end{cases}$

D-CHEM, D-AGRL
Sperb

Mathematik III

WS 2003/2004

Lösung von Probe Vordiplom

1. Die Differentialgleichungen die diese Reaktion darstellen sind:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -kx_1 + kx_2 + d(t) \\ \dot{x}_2(t) = -kx_2 + kx_1 \end{cases}$$

Man berechnet die Laplacetransformierte des Problems:

$$\begin{cases} pX_1(p) = -kX_1(p) + kX_2(p) + \frac{1}{p+\alpha} \\ pX_2(p) = -kX_2(p) + kX_1(p) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (p+k)X_1(p) = kX_2(p) + \frac{1}{p+\alpha} \\ (p+k)X_2(p) = kX_1(p) \quad \Rightarrow \quad X_1(p) = \frac{p+k}{k}X_2(p) \end{cases}$$

$$\frac{(p+k)^2}{k}X_2(p) = kX_2(p) + \frac{1}{p+\alpha} \quad \Rightarrow \quad X_2(p) = \boxed{\frac{k}{p(p+2k)(p+\alpha)}}$$

Um die Rücktrannsformation zu berechnen macht man die Partialbruchzerlegung des Terms

$$\frac{1}{p(p+2k)(p+\alpha)}$$

Hier muss man eine Fallunterscheidung machen

a) $\alpha \neq 2k$

$$\frac{1}{p(p+2k)(p+\alpha)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2k} + \frac{C}{p+\alpha} \Rightarrow A(p+2k)(p+\alpha) + Bp(p+\alpha) + Cp(p+2k) = 1$$

durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$A = \frac{1}{2k\alpha} \qquad B = \frac{1}{2k(2k-\alpha)} \qquad C = \frac{-1}{\alpha(2k-\alpha)}$$

also

$$\begin{aligned} X_2(p) &= \frac{1}{2\alpha p} + \frac{k}{(2k-\alpha)}\left(\frac{1}{2k(p+2k)} - \frac{1}{\alpha(p-\alpha)}\right) \\ \bullet\!\!-\!\!\circ\, x_2(t) &= \frac{1}{2\alpha} + \frac{k}{(2k-\alpha)}\left(\frac{e^{-2kt}}{2k} - \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}\right) = \frac{1}{2\alpha}\left(1 + \frac{\alpha e^{-2kt} - 2ke^{-\alpha t}}{2k-\alpha}\right) \end{aligned}$$

Bitte wenden!

b) $\alpha = 2k \quad \Rightarrow \quad X_2(p) = \frac{k}{p(p+2k)^2}$

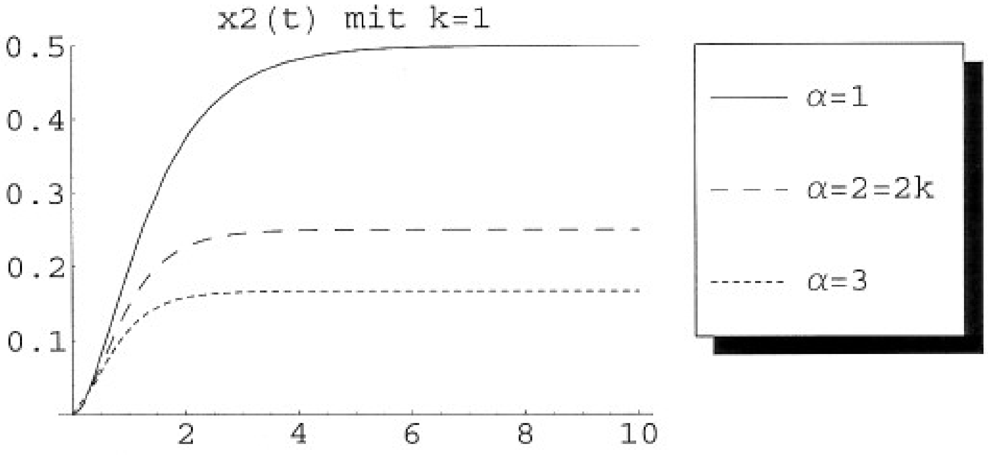
$$\frac{1}{p(p+2k)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2k} + \frac{C}{(p+2k)^2} \Rightarrow A(p+2k)^2 + Bp(p+2k) + Cp = 1$$

durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$A = \frac{1}{4k^2} \qquad B = \frac{-1}{4k^2} \qquad C = \frac{-1}{2k}$$

also

$$\begin{aligned} X_2(p) &= \frac{1}{4k\,p} - \frac{1}{4k(p+2k)} - \frac{1}{2(p+2k)} \\ \bullet\!\!-\!\!\circ\, x_2(t) &= \frac{1}{4k} - \frac{e^{-2kt}}{4k} - \frac{te{-}2kt}{2} = \frac{1-(1-2kt)e^{-2kt}}{4k} \end{aligned}$$



2. Die Laplacetransformierte von die Differentialgleichung ist

$$p^2X(p) - px_0 + X(p) = F(p)$$

Um $F(p)$ zu berechnen muss man zuerst die Transformierte der Basis Funktion berechnen

$$b(t) = \begin{cases} \frac{2t}{\pi} & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{\pi}(\pi - t) & \frac{\pi}{2} < t < \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Siehe nächstes Blatt!

Die Transformierte ist

$$\begin{aligned}
B(p) &= \int_0^\infty b(t)e^{-pt}dt = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} te^{-pt}dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-t)e^{-pt}dt\right) = \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left.\frac{-te^{-pt}}{p}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{p}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-pt}dt - \left.\frac{(\pi-t)e^{-pt}}{p}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{p}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-pt}dt\right) = \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi e^{-p\frac{\pi}{2}}}{2p} - \left.\frac{e^{-pt}}{p^2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi e^{-p\frac{\pi}{2}}}{2p} + \left.\frac{e^{-pt}}{p^2}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = \\
&= \frac{2}{\pi p^2}\left(1 - e^{-p\frac{\pi}{2}} + e^{-p\pi} - e^{-p\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2}{\pi p^2}\left(1 - e^{-p\frac{\pi}{2}}\right)^2
\end{aligned}$$

Mit der Regel für die Laplacetransformation von periodischen Funktionen erhält man:

$$F(p) = \frac{B(p)}{1-e^{-p\pi}} = \frac{\frac{2}{\pi p^2}\left(1-e^{-p\frac{\pi}{2}}\right)^2}{\left(1-e^{-p\frac{\pi}{2}}\right)\left(1+e^{-p\frac{\pi}{2}}\right)} = \frac{2}{\pi p^2}\frac{1-e^{-p\frac{\pi}{2}}}{1+e^{-p\frac{\pi}{2}}}$$

Man erhält für $X(p)$

$$\begin{aligned}
p^2X(p) - px_0 + X(p) &= \frac{2}{\pi p^2}\frac{1-e^{-p\frac{\pi}{2}}}{1+e^{-p\frac{\pi}{2}}} \\
\Rightarrow \quad X(p) &= \frac{2}{\pi p^2(p^2+1)}\frac{1-e^{-p\frac{\pi}{2}}}{1+e^{-p\frac{\pi}{2}}} + x_0\frac{p}{p^2+1} \\
\Rightarrow \quad X(p) = \frac{Y(p)}{1+e^{-p\frac{\pi}{2}}} + x_0\frac{p}{p^2+1} \quad &\text{mit } Y(p) = \frac{2\left(1-e^{-p\frac{\pi}{2}}\right)}{\pi p^2(p^2+1)}
\end{aligned}$$

Die Rücktransformation ist

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k y(t-k\frac{\pi}{2})H(t-k\frac{\pi}{2}) + x_0\cos(t)$$

wobei $H(t)$ die Heavisidefunktion ist. Mit die Zerlegung

$$\frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}$$

erhält man

$$Y(p) = \frac{2\left(1-e^{-p\frac{\pi}{2}}\right)}{\pi}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1} - \frac{e^{-p\frac{\pi}{2}}}{p^2} + \frac{e^{-p\frac{\pi}{2}}}{p^2+1}\right)$$

Die Rücktransformation ergibt

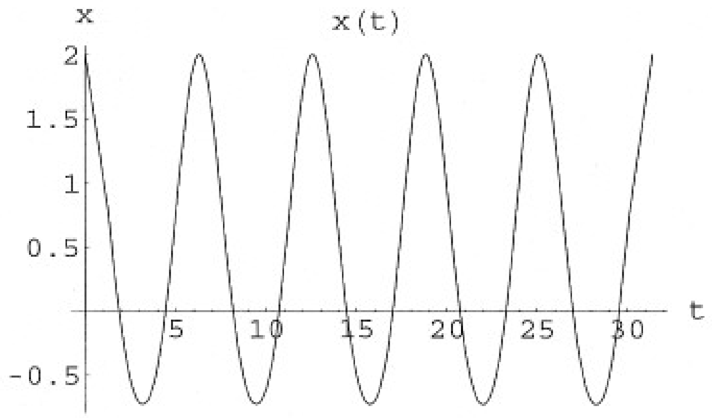
$$y(t) = \frac{2}{\pi}\left(t - \sin(t) - \left(t - \frac{\pi}{2} - \sin(t-\frac{\pi}{2})\right)H(t-\frac{\pi}{2})\right)$$

Bitte wenden!

Für x erhält man

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k y(t-k\frac{\pi}{2})H(t-k\frac{\pi}{2}) + x_0\cos(t) = \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(t-k\frac{\pi}{2}-\sin(t-k\frac{\pi}{2})\right)H(t-k\frac{\pi}{2}) + \\
&\quad -\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(t-(k+1)\frac{\pi}{2}-\sin(t-(k+1)\frac{\pi}{2})\right)H(t-(k+1)\frac{\pi}{2}) + x_0\cos(t) = \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(t-k\frac{\pi}{2}-\sin(t-k\frac{\pi}{2})\right)H(t-k\frac{\pi}{2}) + \\
&\quad +\frac{2}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\left(t-l\frac{\pi}{2}-\sin(t-l\frac{\pi}{2})\right)H(t-l\frac{\pi}{2}) + x_0\cos(t) = \\
&= \frac{2t}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sin(t)+x_0\cos(t)+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(t-k\frac{\pi}{2}-\sin(t-k\frac{\pi}{2})\right)H(t-k\frac{\pi}{2})
\end{aligned}
$$

durch Anwendung von $H(t-k\frac{\pi}{2})H(t-(k+1)\frac{\pi}{2}) = H(t-(k+1)\frac{\pi}{2})$.



3. Das zugehörige Eigenwertproblem ist:

$$
\begin{cases} \Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 & \text{in } \Omega_0 \\ \varphi = 0 & \text{auf } \partial\Omega_0 \end{cases}
$$

Wegen der Radialsymmetrie des Problem muss man nur die radialsymmetrische Eigenfunktionen finden. Den radialen Teil von dem Laplaceoperator in Kugelkoodinaten ist $\Delta_r f(r) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r) + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}(r)$.
Den EWP wird:

$$
\begin{cases} \varphi''(r) + \frac{2}{r}\varphi'(r) + \lambda\varphi(r) = 0 & 0 \le r \le R \\ \varphi(R) = 0 \end{cases}
$$

Siehe nächstes Blatt!

mit der Substitution $\varphi(r) = \frac{f(r)}{r}$ erhält man

$$f''(r) + \lambda f(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(r) = A\cos(\sqrt{\lambda}r) + B\sin(\sqrt{\lambda}r)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(r) = A\frac{\cos(\sqrt{\lambda}r)}{r} + B\frac{\sin(\sqrt{\lambda}r)}{r}$$

$A = 0$, weil die Eigenfunktion für $r = 0$ endlich bleiben soll. Durch einsetzen der Randbedingungen erhält man:

$$\varphi_k(r) = C\frac{\sin(\frac{\pi k}{R}r)}{r} \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi}{R}k\right)^2 \quad k = 1, 2, 3...$$

Die Konstante C wird bestimmt durch Normierung

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\Omega_0} \varphi_k^2(r)dV = \int_0^R C^2\frac{\sin^2(\frac{\pi k}{R}r)}{r^2}4\pi r^2 dr = \\ &= 4\pi C^2\int_0^R \sin^2(\frac{\pi k}{R}r)dr = 2\pi RC^2 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \end{aligned}$$

Den Wärmeleitungskern wird

$$K(r,\varrho,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(r)\varphi_k(\varrho)e^{-D\lambda_k t} = \frac{1}{2\pi R}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{\pi k}{R}r)}{r}\frac{\sin(\frac{\pi k}{R}\varrho)}{\varrho}e^{-D\lambda_k t}$$

Die Lösung wird

$$\begin{aligned} u(r,t) &= \int_0^t\int_{\Omega_0} q(\varrho,\tau)K(r,\varrho,t-\tau)dV\,d\tau = \\ &= \int_0^t\int_0^R \frac{1}{2\pi R}\sum_{k=1}^{\infty} q_0\frac{\varrho}{R}\frac{\sin(\frac{\pi k}{R}r)}{r}\frac{\sin(\frac{\pi k}{R}\varrho)}{\varrho}e^{-D\lambda_k(t-\tau)}4\pi\varrho^2 d\varrho d\tau \\ &= \frac{2q_0}{R^2 r}\sum_{k=1}^{\infty}\sin(\frac{\pi k}{R}r)e^{-D\lambda_k t}\int_0^R \varrho^2\sin(\frac{\pi k}{R}\varrho)d\varrho\int_0^t e^{D\lambda_k\tau}d\tau \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \int_0^R \varrho^2\sin(\frac{\pi k}{R}\varrho)d\varrho &= \frac{-R\varrho^2}{\pi k}\cos(\frac{\pi k)}{R}\varrho)\Big|_0^R + \frac{2R}{\pi k}\int_0^R \varrho\cos(\frac{\pi k}{R}\varrho)d\varrho = \\ &= -\frac{R^3}{k\pi}\cos(\pi k) + \frac{2R^2}{\pi^2k^2}\varrho\sin(\frac{\pi k}{R}\varrho)\Big|_0^R - \frac{2R^2}{\pi^2k^2}\int_0^R \sin(\frac{\pi k}{R}\varrho)d\varrho = \\ &= \frac{R^3(-1)^{k+1}}{k\pi} + \frac{2R^3}{\pi^3k^3}\cos(\frac{\pi k}{R}\varrho)\Big|_0^R = \\ &= \frac{R^3}{\pi^3k^3}\left((2-\pi^2k^2)(-1)^k \underbrace{-2}_{?}\right) \end{aligned}$$

Bitte wenden!

und mit

$$\int_0^t e^{D\lambda_k \tau} d\tau = \frac{e^{D\lambda_k t} - 1}{D\lambda_k}$$

erhält man

$$\begin{aligned} u(r,t) &= \frac{2q_0}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\frac{\pi k}{R} r) e^{-D\lambda_k t} \frac{R}{\pi^3 k^3} \left((2-\pi^2 k^2)(-1)^k - 2\right) \frac{e^{D\lambda_k t} - 1}{D\lambda_k} = \\ &= \frac{2q_0 R^2}{D\pi^5 r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left((2-\pi^2 k^2)(-1)^k - 2\right)\left(1 - e^{D\lambda_k t}\right)}{k^5} \sin(\frac{\pi k}{R} r) \end{aligned}$$

Für $t \to \infty$ das Problem wird

$$D\Delta u_\infty = -q_0 \frac{r}{R} \quad \text{in } \Omega$$

Wegen der Radialsymmetrie des Problems wird das zu

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2 u_\infty'(r)\right)' = -\frac{q_0}{D}\frac{r}{R}$$

Man kann diese Differentialgleichung durch Integration lösen

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_\infty'(r)\right)' &= -\frac{q_0}{D}\frac{r}{R} \\ \left(r^2 u_\infty'(r)\right)' &= -\frac{q_0}{D}\frac{r^3}{R} \\ r^2 u_\infty'(r) &= -\frac{q_0}{DR}\int r^3\, dr \\ r^2 u_\infty'(r) &= -\frac{q_0}{DR}\frac{r^4}{4} + A \\ u_\infty'(r) &= -\frac{q_0}{4DR} r^2 + \frac{A}{r^2} \\ u_\infty(r) &= -\frac{q_0}{4DR}\int r^2 dr + \int \frac{A}{r^2} dr \\ u_\infty(r) &= -\frac{Dq_0}{12DR} r^3 - A\frac{1}{r} + B \end{aligned}$$

Die Lösung u_∞ soll in ganz Ω endlich bleiben, dann $\lim_{r\to 0} u_\infty < \infty \quad A = 0$. Mit der Randbedingung $u_\infty(R) = 0$ erhält man

$$u_\infty(r) = \frac{q_0 R^2}{12D}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right)$$

Siehe nächstes Blatt!

4. Mit der Substitution $u(x,y,z,t) = v(x,y,z,t)e^{-\gamma t}$ wird das neue Problem ein reines Diffusionsproblem.

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = D\Delta v \quad \text{in } (0,1)^2 \times (0,\infty) \\ v_z(x,y,0,t) = v(0,y,z,t) = v(x,0,z,t) = v(1,y,z,t) = v(x,1,z,t) = 0 \\ v(x,y,z,0) = \begin{cases} \sin(\pi x)\sin(\pi y) & 0 \le z \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Man sieht, dass das Gebiet ein kartesiches Produkt von zwei Teilgebieten, mit dem Ansatz $v(x,y,z,t) = v_1(x,y,t)v_2(z,t)$ erhält man zwei Teilprobleme

1.
$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial t} = D\Delta v_1 \quad \text{in } (0,1)^2 \\ v_1(0,y,t) = v_1(x,0,t) = v_1(1,y,t) = v_1(x,1,t) = 0 \\ v(x,y,0) = \sin(\pi x)\sin(\pi y) \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \frac{\partial v_2}{\partial t} = D\frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} \quad \text{in } (0,\infty) \\ v_{2z}(0,t) = 0 \\ v_2(z,0) = \begin{cases} 1 & 0 \le z \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Die Lösungen dieser Probleme sind

1. Mit dem Eigenwertproblem

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \lambda\varphi \quad \text{in } (0,1)^2 \\ \varphi(0,y) = \varphi(x,0) = \varphi(1,y) = \varphi(x,1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \varphi_{k,l}(x,y) = 2\sin(\pi kx)\sin(\pi ly) \\ \lambda_{k.l} = \pi^2(k^2+l^2) \end{matrix}$$

erhält man den Wärmeleitungskern

$$\begin{aligned} K(x,y,\xi,\eta,t) &= \sum_{k,l=1}^{\infty} \varphi_{k,l}(x,y)\varphi_{k,l}(\xi,\eta)e^{-D\lambda_{k,l}t} = \\ &= 4\sum_{k=1}^{\infty} \sin(\pi kx)\sin(\pi ly)\sin(\pi k\xi)\sin(\pi l\eta)\, e^{-D\lambda_{k,l}t} \end{aligned}$$

und damit die Lösung

$$\begin{aligned} v_1(x,y,t) &= \int_0^1\int_0^1 v_1(\xi,\eta,0)K(x,y,\xi,\eta,t)d\xi d\eta = \\ &= \int_0^1\int_0^1 \sin(\pi\xi)\sin(\pi\eta)\,4\sum_{k=1}^{\infty}\sin(\pi kx)\sin(\pi ly)\sin(\pi k\xi)\sin(\pi l\eta)\,e^{-D\lambda_{k,l}t} = \\ &= 4\sum_{k=1}^{\infty}\sin(\pi kx)\sin(\pi ly)\,e^{-D\lambda_{k,l}t}\underbrace{\int_0^1\sin(\pi\xi)\sin(\pi k\xi)\,d\xi}_{=\frac{1}{2}\delta_{1,k}}\underbrace{\int_0^1\sin(\pi\eta)\sin(\pi l\eta)\,d\eta}_{=\frac{1}{2}\delta_{1,l}} = \\ &= \sin(\pi x)\sin(\pi y)\,e^{-2D\pi^2 t} \end{aligned}$$

Bitte wenden!

2. Man erweitet das Problem auf $(-\infty, \infty)$ durch Axialspiegelung

$$\begin{cases} \frac{\partial v_2}{\partial t} = D\frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} & \text{in } (-\infty, \infty) \\ v_2(z,0) = \begin{cases} 1 & -1 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Mit

$$h(z) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

kann man die Anfangsbedingung zerlegen

$$v_2(z,0) = h(z-1) - h(z+1)$$

Mit der bekannte Lösung von

$$\begin{cases} \frac{\partial b}{\partial t} = D\frac{\partial^2 b}{\partial z^2} & \text{in } (-\infty, \infty) \\ v_2(z,0) = \begin{cases} 1 & z < 0 \\ 0 & z > 0 \end{cases} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b(z,t) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

und der linearität des Problems erhält man

$$v_2(z,t) = b(z-1) - b(z+1) = \frac{1}{2}\left(\text{erfc}\left(\frac{z-1}{2\sqrt{Dt}}\right) - \text{erfc}\left(\frac{z+1}{2\sqrt{Dt}}\right)\right)$$

Das Endresultat

$$u(x,y,t) = v_1(x,t)v_2(x,t)e^{-\gamma t} = \frac{1}{2}\left(\text{erfc}\left(\frac{z-1}{2\sqrt{Dt}}\right) - \text{erfc}\left(\frac{z+1}{2\sqrt{Dt}}\right)\right)\sin(\pi x)\sin(\pi y)\, e^{-(2D\pi^2+\gamma)t}$$