D-CHAB | Mathematik III | Frühling 2005
Prof. Dr. R. Sperb

Lösung Mathematik III

1. Mit

$$
\begin{aligned}
x(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(p)\\
\dot{x}(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; pX(p) - \underbrace{x(0)}_{=1} = pX(p) - 1\\
\ddot{x}(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; p^2X(p) - p\underbrace{x(0)}_{=1} - \underbrace{\dot{x}(0)}_{=0} = p^2X(p) - p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} e^{-t} & 0 < t < 1 \\ 0 & t > \cancel{5}1 \end{cases} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \int_0^1 e^{-t}e^{-pt}dt = -\frac{e^{-(p+1)t}}{p+1}\bigg|_0^1 = \frac{1}{p+1} - \frac{e^{-(p+1)}}{p+1}
$$

erhalten wir

$$
\begin{aligned}
p^2X(p) - p + 2(pX(p) - 1) + X(p) &= \frac{1}{p+1} - \frac{e^{-(p+1)}}{p+1}\\
\underbrace{(p^2 + 2p + 1)}_{=(p+1)^2}X(p) - p - 2 &= \frac{1}{p+1} - \frac{e^{-p}}{e(p+1)}\\
X(p) &= \frac{1}{(p+1)^3} - \frac{1}{e}\frac{e^{-p}}{(p+1)^3} + \frac{p+2}{(p+1)^2}
\end{aligned}
$$

Um diese Funktion zurückzutransformieren berechnen wir die Partialbruchzerlegung von

$$
\begin{aligned}
\frac{p+2}{(p+1)^2} &= \frac{A}{p+1} + \frac{B}{(p+1)^2}\\
p+2 &= A(p+1) + B\\
p+2 &= Ap + A + B\\
&\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A + B = 2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad A = 1\, B = 1\\
\frac{p+2}{(p+1)^2} &= \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}
\end{aligned}
$$

Also

$$
X(p) = \frac{1}{(p+1)^3} - \frac{1}{e}\frac{e^{-p}}{(p+1)^3} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}
$$

Bitte wenden!

Mit der Verschiebungregel

$$f(t-a)H(t-a) \circ\!-\!\bullet\; F(p)e^{-ap} \qquad H(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$

und den Rücktransformationen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(p+1)^3} &\quad \bullet\!-\!\circ \quad \frac{t^2}{2}e^{-t} \\
\frac{1}{(p+1)^2} &\quad \bullet\!-\!\circ \quad te^{-t} \\
\frac{1}{p+1} &\quad \bullet\!-\!\circ \quad e^{-t} \\
\frac{1}{e}\frac{e^{-p}}{(p+1)^3} &\quad \bullet\!-\!\circ \quad \frac{1}{e}\frac{(t-1)^2}{2}e^{-(t-1)}H(t-1) = (\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2})e^{-t}H(t-1)
\end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{t^2}{2}e^{-t} - (\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2})e^{-t}H(t-1) + e^{-t} + te^{-t} \\
&= \begin{cases} (\frac{t^2}{2} + t + 1)e^{-t} & 0<t<1 \\ (2t + \frac{1}{2})e^{-t} & t>1 \end{cases}
\end{aligned}$$

| ?

2. Zuerst muss man die Randbedingungen homogenisieren. Eine einfache Wahl ist

$$v = u - 1$$

Dann berechnet man das neue Problem für v

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \Delta(u-1) = \Delta u = 4u - xy = 4(v+1) - xy \\
&= 4v + 4 - xy
\end{aligned}$$

$\Delta V (+4) = 0$ $\qquad$ $\Delta V =$

Das neue Problem lautet

$$\begin{cases} \Delta v - 4v + xy - 4 = 0 \\ v = 0 \quad \text{auf } \Gamma_0 \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_1 \end{cases}$$

Wir betrachten das Eigenwertproblem

$$\begin{cases} \Delta\phi + \lambda\phi = 0 \\ \phi = 0 \quad \text{auf } \Gamma_0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_1 \end{cases}$$

Die normierten Eigenfunktionen lauten

$$\phi_{k,l} = \frac{4}{\pi}\sin(kx)\sin(ly)$$

Siehe nächstes Blatt!

für $k = 1, 3, 5, \cdots$ und $l = 1, 3, 5, \cdots$
Die zugehörigen Eigenwerte sind

$$\lambda_{k,l} = k^2 + l^2$$

Mit diesen Funktionen machen wir eine Reihenentwicklung der Quelle $xy - 4$, d.h.

$$xy - 4 = \sum_{\substack{k,l=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \beta_{k,l} \phi_{k,l}(x, y)$$

wobei

$$\begin{aligned} \beta_{k,l} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (xy - 4) \phi_{k,l}(x, y) dx\, dy \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(kx) dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sin(ly) dy - \frac{16}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(kx) dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(ly) dy \end{aligned}$$

Mit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(kx) dx = \frac{1}{k^2} \sin(\frac{\pi}{2} k) = \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^2}$$

und mit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(kx) dx = \frac{1}{k}$$

$\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{k-1}{2}}$

erhalten wir

$$\beta_{k,l} = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^2} \frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}}}{l^2} - \frac{16}{\pi} \frac{1}{k} \frac{1}{l} = \frac{4}{kl\pi} \left(\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} (-1)^{\frac{l-1}{2}}}{kl} - 4 \right) = -\frac{4}{kl\pi} \left(\frac{(-1)^{\frac{k+l}{2}}}{kl} + 4 \right)$$

Wenn wir den Ansatz

$$v(x, y) = \sum_{\substack{k,l=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} v_{k,l} \phi_{k,l}(x, y)$$

in die Differentialgleichung einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta \left(\sum_{\substack{k,l=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} v_{k,l} \phi_{k,l}(x, y) \right) - 4 \left(\sum_{\substack{k,l=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} v_{k,l} \phi_{k,l}(x, y) \right) + \left(\sum_{\substack{k,l=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \beta_{k,l} \phi_{k,l}(x, y) \right) &= 0 \\ \sum_{\substack{k,l=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \left(-\lambda v_{k,l} - 4 v_{k,l} + \beta_{k,l} \right) \phi_{k,l}(x, y) &= 0 \\ \Rightarrow \qquad -\lambda v_{k,l} - 4 v_{k,l} + \beta_{k,l} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad v_{k,l} = \frac{\beta_{k,l}}{\lambda_{k,l} + 4} = -\frac{4}{kl(k^2 + l^2 + 4)\pi} \left(\frac{(-1)^{\frac{k+l}{2}}}{kl} + 4 \right)$$

Bitte wenden!

Die Lösung ist

$$v(x,y) = -\frac{16}{\pi^2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{kl(k^2+l^2+4)} \left(\frac{(-1)^{\frac{k+l}{2}}}{kl} + 4 \right) \sin(kx)\sin(ly)$$

und somit

$$u(x,y) = -\frac{16}{\pi^2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{kl(k^2+l^2+4)} \left(\frac{(-1)^{\frac{k+l}{2}}}{kl} + 4 \right) \sin(kx)\sin(ly) + 1.$$

3. Zuerst berechnet man die Laplacetransformierte dieser Gleichung. Mit

$$\begin{aligned} u(x,t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ U(x,p) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &\circ\!\!-\!\!\bullet\ pU(x,p) - \underbrace{u(x,0)}_{=1} = pU(x,p) - 1 \\ 1 &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{p} \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{cases} pU(x,p) - 1 = D\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,p) & \text{in } (0,\infty) \\ -\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} + h(U(0,p) - \frac{2}{p}) = 0 \end{cases}$$

Wenn man $q = \sqrt{\frac{p}{D}}$ definiert, schreibt sich die Gleichung als:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,p) - q^2 U(x,p) = -\frac{1}{D}$$

Die homogene Lösung dieser Gleichung ist

$$U_h(x,p) = Ae^{-qx} + Be^{qx}$$

Eine Lösung des inhomogenen Problems ist

$$U_i(x,p) = \frac{1}{Dq^2} = \frac{1}{p}$$

Die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung ist somit

$$U(x,p) = U_h(x,p) + U_i(x,p) = Ae^{-qx} + Be^{qx} + \frac{1}{p}$$

Weil diese Lösung im Unendlichen beschänkt bleiben muss, d.h. $\lim_{x\to\infty} |U(x,p)| < \infty$, ist $B = 0$.

Siehe nächstes Blatt!

Um A zu finden setzen wir die Randbedingungen in die Lösung ein.

$$\begin{aligned} qA + h(A + \frac{1}{p} - \frac{2}{p}) &= 0 \\ (q+h)A &= \frac{h}{p} \\ A &= \frac{h}{p(q+h)} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$U(x,p) = \frac{h}{p(q+h)} e^{-qx} + \frac{1}{p}$$

Mit der Formel 14 aus der Tabelle von der Vorlesung

$$\frac{e^{-qx}}{p(q+h)} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1}{h}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) - \frac{1}{h} e^{hx+Dth^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} + h\sqrt{Dt}\right)$$

erhalten wir

$$u(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) - e^{hx+Dth^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} + h\sqrt{Dt}\right) + 1$$

4. Zuerst muss man die Randbedingungen homogenisieren mittels

$$v = u - 1 + e^{-t}$$

Das neues Problem lautet

$$v_t \;=\; u_t - e^{-t} = Du_{xx} - e^{-t} = Dv_{xx} - e^{-t}$$

Wenn wir die Anfangsbedingungen transformieren erhaltan wir

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - e^{-t} \quad \text{in } \Omega \\ v = 0 \quad \text{auf } \Gamma_0 \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_1 \\ v(x,y,0) = \begin{cases} 1 & \frac{\pi}{2} < x < \pi;\ \frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Die normierten Eigenfunktionen des zugehörigen Problems sind

$$\phi_{k,l}(x,y) = C_l \sin(\frac{k}{2}x)\cos(2ly) \qquad C_l = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & l = 0 \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} & l \neq 0 \end{cases}$$

mit $k = 1, 3, 5, \cdots$ und $l = 0, 1, 2, 3, \cdots$.Die zugehörigen Eignewerte lauten

$$\lambda_{k,l} = \frac{k^2}{4} + 4l^2$$

Bitte wenden!

Der Wärmeleitungskern schreibt sich als

$$
\begin{aligned}
K(x,y,\xi,\eta,t) &= \sum_{k,l} \phi_{k,l}(x,y)\phi_{k,l}(\xi,\eta)e^{-D\lambda_{k,l}t} \\
&= \sum_{\substack{k=1,l=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} C_l^2 \sin(\frac{k}{2}x)\cos(2ly)\sin(\frac{k}{2}\xi)\cos(2l\eta)e^{-D\lambda_{k,l}t}
\end{aligned}
$$

Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist somit

$$
\begin{aligned}
v(x,y,t) &= \int_\Omega v(\xi,\eta,0)K(x,y,\xi,\eta,t)d\xi d\eta + \int_0^t \int_\Omega \underbrace{q(\xi,\eta,\tau)}_{e^{-\tau}} K(x,y,\xi,\eta,t-\tau)d\xi d\eta d\tau \\
&= \sum_{\substack{k=1,l=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} C_l^2 \sin(\frac{k}{2}x)\cos(2ly)e^{-D\lambda_{k,l}t} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(\frac{k}{2}\xi)d\xi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2l\eta)d\eta \\
&\quad + \sum_{\substack{k=1,l=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} C_l^2 \sin(\frac{k}{2}x)\cos(2ly)e^{-D\lambda_{k,l}t} \int_0^{\pi} \sin(\frac{k}{2}\xi)d\xi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2l\eta)d\eta \int_0^t e^{(D\lambda_{k,l}-1)\tau}
\end{aligned}
$$

Mit

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(\frac{k}{2}\xi)d\xi &= -\frac{2}{k}\cos(\frac{k}{2}\xi)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{2}{k}\cos(\frac{\pi k}{4}) \\
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2l\eta)d\eta &= \begin{cases} \eta|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} & l=0 \\ \frac{1}{2l}\sin(2l\eta)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} & l\neq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & l=0 \\ -\frac{1}{2l}\sin(\frac{\pi l}{2}) & l\neq 0 \end{cases} \\
\int_0^{\pi} \sin(\frac{k}{2}\xi)d\xi &= -\frac{2}{k}\cos(\frac{k}{2}\xi)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{k} \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2l\eta)d\eta &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & l=0 \\ 0 & l\neq 0 \end{cases} \\
\int_0^t e^{(D\lambda_{k,l}-1)\tau}d\tau &= \frac{e^{(D\lambda_{k,l}-1)t}-1}{D\lambda_{k,l}-1}
\end{aligned}
$$

Siehe nächstes Blatt!

erhalten wir

$$
\begin{aligned}
v(x,y,t) &= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{\pi^2}{4}\frac{2}{k}\cos(\frac{\pi k}{4})\frac{\pi}{4}\sin(\frac{k}{2}x)e^{-D\lambda_{k,0}t} \\
&\quad + \sum_{\substack{k=1,l=1\\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{\pi^2}{8}\frac{2}{k}\cos(\frac{\pi k}{4})\frac{1}{2l}\sin(\frac{\pi l}{2})\sin(\frac{k}{2}x)\cos(2ly)e^{-D\lambda_{k,l}t} \\
&\quad + \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{\pi^2}{4}\frac{2}{k}\frac{\pi}{2}\frac{e^{(D\lambda_{k,0}-1)t}-1}{D\lambda_{k,0}-1}\sin(\frac{k}{2}x)e^{-D\lambda_{k,0}t} \\
&= \frac{\pi^2}{4}\left(\pi \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi k}{4})e^{-D\lambda_{k,0}t} + \frac{e^{-t}-e^{-D\lambda_{k,0}t}}{D\lambda_{k,0}-1}\right)\sin(\frac{k}{2}x)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=1,l=1\\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{lk}\cos(\frac{\pi k}{4})\sin(\frac{\pi l}{2})\sin(\frac{k}{2}x)\cos(2ly)e^{-D\lambda_{k,l}t}\right)
\end{aligned}
$$

Für u erhält man

$$
\begin{aligned}
u(x,y,t) &= v(x,y,t) + 1 - e^{-t} \\
&= \frac{\pi^2}{4}\left(\pi \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi k}{4})e^{-D\lambda_{k,0}t} + \frac{e^{-t}-e^{-D\lambda_{k,0}t}}{D\lambda_{k,0}-1}\right)\sin(\frac{k}{2}x)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=1,l=1\\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{lk}\cos(\frac{\pi k}{4})\sin(\frac{\pi l}{2})\sin(\frac{k}{2}x)\cos(2ly)e^{-D\lambda_{k,l}t}\right) + 1 - e^{-t}
\end{aligned}
$$