D-CHAB | Mathematik III | Herbst 2005

Prof. Dr. R. Sperb

Lösung Mathematik III

1. Zuerst berechnet man die Laplacetransformierte des Problem. Mit

$$
\begin{array}{lll}
x(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & X(p) \\
\ddot{x}(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) = p^2X(p) - p \\
f(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & F(p) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(t)e^{-pt}dt = e^{-pt}\left(-p\cos(t) + \sin(t)\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{p(1+e^{-\pi p})}{p^2+1}
\end{array}
$$

erhalten wir

$$p^2X(p) - p + X(p) = \frac{p(1+e^{-\pi p})}{p^2+1}$$

Wir auflösen für $X(p)$

$$
\begin{aligned}
(p^2+1)X(p) &= \frac{p}{p^2+1} + p + \frac{pe^{-\pi p}}{p^2+1} \\
X(p) &= \frac{p}{(p^2+1)^2} + \frac{p}{p^2+1} + \frac{pe^{-\pi p}}{(p^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

Es gibt zwei Möglichkeiten die Rücktransformation zu machen. Die erste ist mit Partialbruchzerlegung

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{(p^2+1)^2} &= \frac{A}{p-i} + \frac{B}{p+i} + \frac{C}{(p-i)^2} + \frac{D}{(p+i)^2} \\
p &= A(p^2+1)(p+i) + B(p^2+1)(p-i) + C(p+i)^2 + D(p-i)^2 \\
p &= A(p^3+2pi+p+i) + B(p^3-2pi+p-i) + C(p^2+2pi-1) + D(p^2-2pi-1) \\
p &= (A+B)p^3 + (2Ai-2Bi+C+D)p^2 + (A+B+2Ci-2Di)p + Ai - Bi - C - D \\
& \left\{\begin{array}{l} A+B=0 \quad \Rightarrow B=-A \\ 2Ai-2Bi+C+D=0 \\ A+B+2Ci-2Di=1 \\ Ai-Bi-C-D=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4Ai+C+D=0 \\ 2Ci-2Di=1 \quad \Rightarrow C=D+\frac{1}{2i} \\ 2Ai-C-D=0 \end{array}\right. \\
\Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} 4Ai+2D+\frac{1}{2i}=0 \\ 2Ai-2D-\frac{1}{2i}=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=0 \Rightarrow B=0 \\ 6D=-\frac{3}{2i} \Rightarrow D=-\frac{1}{4i} \Rightarrow C=\frac{1}{4i} \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten

$$\frac{p}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{4i}\frac{1}{(p-i)^2} - \frac{1}{4i}\frac{1}{(p+i)^2}$$

Bitte wenden!

und

$$X(p) = \frac{1}{4i}\frac{1}{(p-i)^2} - \frac{1}{4i}\frac{1}{(p+i)^2} + \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{4i}\frac{e^{-\pi p}}{(p-i)^2} - \frac{1}{4i}\frac{e^{-\pi p}}{(p+i)^2}$$

Mit der Transformationregel

$$\begin{aligned} 1 &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{p} \\ t &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{p^2} \\ \cos(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{p}{p^2+1} \\ f(t-a)h(a-t) &\circ\!\!-\!\!\bullet F(p)e^{-ap} \qquad \text{mit} \quad h(t) = \begin{cases} 1 & t<0 \\ 0 & t>0 \end{cases} \\ f(t)e^{at} &\circ\!\!-\!\!\bullet F(p-a) \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{t}{4i}e^{it} - \frac{t}{4i}e^{-it} + \cos(t) + \left(\frac{t-\pi}{4i}e^{it} - \frac{t-\pi}{4i}e^{-it}\right)h(\pi-t) \\ &= \frac{t}{2}\sin(t) + \cos(t) + \frac{t-\pi}{2}\underbrace{\sin(t-\pi)}_{-\sin(t)}h(\pi-t) \\ &= \begin{cases} \frac{t}{2}\sin(t) + \cos(t) & t<\pi \\ \frac{\pi}{2}\sin(t) + \cos(t) & t>\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Es gibt eine andere Möglichkeit um diese Rücktransformation zu machen. Mit der Regel

$$tf(t) \circ\!\!-\!\!\bullet -\frac{d}{dp}F(p)$$

erhält man für sinus und cosinus

$$\begin{aligned} t\cos(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet -\frac{d}{dp}\frac{p}{p^2+1} = \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2} \\ t\sin(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet -\frac{d}{dp}\frac{1}{p^2+1} = \frac{2p}{(p^2+1)^2} \end{aligned}$$

Mit diese zwei transformierte ist einfach zu sehen dass

$$X(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2} + \frac{p}{p^2+1} + \frac{pe^{-\pi p}}{(p^2+1)^2} \bullet\!\!-\!\!\circ x(t) = \frac{t}{2}\sin(t) + \cos(t) + \frac{t-\pi}{2}\sin(t-\pi)h(\pi-t)$$

2. Zuerst homogenisieren wir die Randbedingungen durch

$$v = u - 1$$

Siehe nächstes Blatt!

Dann erhalten wir

$$\Delta v = \Delta u = 2u - \cos(y) = 2v + 2 - \cos(y)$$

d.h.

$$\begin{cases} \Delta v - 2v - 2 + \cos(y) = 0 \quad \text{in } (0,\pi) \times (0, \frac{\pi}{2}) \\ v_x(0,y) = v(\pi,y) = v_y(x,0) = v_y(x,\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

Den zugehörigen EWP ist

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 \quad \text{in } (0,\pi) \times (0, \frac{\pi}{2}) \\ \varphi_x(0,y) = \varphi(\pi,y) = \varphi_y(x,0) = \varphi_y(x,\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

Die normierte Lösung ist

$$\begin{aligned} \varphi_{k,l}(x,y) &= C_l \cos(\frac{k}{2}x)\cos(2ly) \\ \lambda_{k,l} &= \frac{k^2+16l^2}{4} \quad \text{mit } k = 1,3,5,\ldots \text{ und } l = 0,1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

mit

$$C_l = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & l = 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{\pi} & l \neq 0 \end{cases}$$

Wir enwickeln 1 und $\cos(y)$ durch die Eigenfunktionen

$$1 = \sum_{k,l} \alpha_{k,l}\varphi_{k,l}(x,y)$$

wo

$$\begin{aligned} \alpha_{k,l} &= \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{k,l}(x,y)dydx \\ &= C_l \int_0^\pi \cos(\frac{k}{2}x)dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2ly)dy \end{aligned}$$

Mit

$$\int_0^\pi \cos(\frac{k}{2}x)dx = \frac{2}{k}\sin(\frac{\pi k}{2})$$

und

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2ly)dy = \frac{\pi}{2}\delta_{l,0}$$

erhalten wir

$$\alpha_{k,l} = \frac{2}{k}\delta_{0,l}\sin(\frac{\pi k}{2})$$

Für $\cos(y)$ erhalten wir

$$\cos(y) = \sum_{k,l} \beta_{k,l}\varphi_{k,l}(x,y)$$

Bitte wenden!

wo

$$\begin{aligned}\beta_{k,l} &= \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)\varphi_{k,l}(x,y)dydx \\ &= C_l \int_0^\pi \cos(\frac{k}{2}x)dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)\cos(2ly)dy\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)\cos(2ly)dy &= \frac{\sin((2l-1)x)}{2(2l-1)} + \frac{\sin((2l+1)x)}{2(2l+1)}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(\pi l - \frac{\pi}{2})}{2(2l-1)} + \frac{\sin(\pi l + \frac{\pi}{2})}{2(2l+1)} \\ &= \frac{-\cos(\pi l)}{2(2l-1)} + \frac{\cos(\pi l)}{2(2l+1)} = \frac{(-1)^{l+1}}{2}\left(\frac{1}{2l-1} + \frac{1}{2l+1}\right) = \frac{(-1)^{l+1}}{4l^2-1}\end{aligned}$$

Wenn wir den Ansatz

$$v(x,y) = \sum_{k,l} v_{k,l}\varphi_{k,l}(x,y)$$

in die Differentialgleichung einsetzen, erhalten wir

$$\sum_{k,l} \left(-\lambda_{k,l}v_{k,l} - 2v_{k,l} - \alpha_{k,l} + \beta_{k,l}\right)\varphi_{k,l}(x,y) = 0$$

Das ist nur möglich, wenn

$$\begin{aligned}v_{k,l} &= \frac{\beta_{k,l} - 2\alpha_{k,l}}{\lambda_{k,l}+2} \\ &= \begin{cases} \frac{16(1-\pi)}{\pi(k^2+8)k}\sin(\frac{\pi k}{2}) & l = 0 \\ \frac{\sqrt{2}16(-1)^{l+1}}{\pi k(4l^2-1)(k^2+16l^2+8)}\sin(\frac{\pi k}{2}) & l \neq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Die Lösung für v ist

$$\begin{aligned}v(x,y) &= \frac{32}{\pi^2}\sum_{\substack{k=1\\ \text{ungerade}}}^{\infty} \frac{1-\pi}{(k^2+8)k}\sin(\frac{\pi k}{2})\cos(\frac{k}{2}x) \\ &\quad -\frac{64}{\pi^2}\sum_{\substack{k=1,\text{ungerade}\\ l=1}}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(4l^2-1)(k^2+16l^2+8)k}\sin(\frac{\pi k}{2})\cos(\frac{k}{2}x)\cos(2ly)\end{aligned}$$

Und für u

$$\begin{aligned}u(x,y) &= \frac{32}{\pi^2}\sum_{\substack{k=1\\ \text{ungerade}}}^{\infty} \frac{1-\pi}{(k^2+8)k}\sin(\frac{\pi k}{2})\cos(\frac{k}{2}x) \\ &\quad -\frac{64}{\pi^2}\sum_{\substack{k=1,\text{ungerade}\\ l=1}}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(4l^2-1)(k^2+16l^2+8)k}\sin(\frac{\pi k}{2})\cos(\frac{k}{2}x)\cos(2ly) + 1\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Zuerst lösen wir das Eigenwertproblem

$$\begin{cases} \varphi_{xx}(x) + \lambda\varphi(x) = 0 \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0 \end{cases}$$

Die Lösung ist

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{\pi k}{L} x) \qquad \lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{L^2}$$

mit $k = 1, 2, 3, \ldots$

Damit können wir den Wärmeleitungskern berechnen

$$K(x, \xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)\varphi_k(\xi) e^{-D\lambda_k t} = \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\frac{\pi k}{L} x) \sin(\frac{\pi k}{L} \xi) e^{-D\frac{\pi^2 k^2}{L^2} t}$$

Wir setzen unsere Anfangsbedingung und die Quelle in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^L u_0(\xi) K(x,\xi,t) d\xi + \int_0^t \int_0^L q(\xi,\tau) K(x,\xi,t-\tau) d\xi d\tau \\ &= \int_0^L \sin(\frac{2\pi}{L}\xi) \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\frac{\pi k}{L} x) \sin(\frac{\pi k}{L}\xi) e^{-D\frac{\pi^2 k^2}{L^2} t} d\xi \\ &\quad + \int_0^t \int_0^L \sin(\frac{\pi}{L}\xi) \tau e^{-\alpha\tau} \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\frac{\pi k}{L} x) \sin(\frac{\pi k}{L}\xi) e^{-D\frac{\pi^2 k^2}{L^2}(t-\tau)} d\xi d\tau \\ &= \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\frac{\pi k}{L} x) e^{-D\frac{\pi^2 k^2}{L^2} t} \\ &\quad \times \left(\int_0^L \sin(\frac{2\pi}{L}\xi) \sin(\frac{\pi k}{L}\xi) d\xi + \int_0^L \sin(\frac{\pi}{L}\xi) \sin(\frac{\pi k}{L}\xi) d\xi \int_0^t \tau e^{(D\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - \alpha)\tau} d\tau \right) \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin(\frac{2\pi}{L}\xi) \sin(\frac{\pi k}{L}\xi) d\xi &= \frac{L}{2}\delta_{k,2} \\ \int_0^L \sin(\frac{\pi}{L}\xi) \sin(\frac{\pi k}{L}\xi) d\xi &= \frac{L}{2}\delta_{k,1} \\ \int_0^t \tau e^{(D\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - \alpha)\tau} d\tau &= \frac{t e^{(D\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - \alpha)t}}{D\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - \alpha} - \frac{e^{(D\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - \alpha)t}}{(D\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - \alpha)^2} + \frac{1}{(D\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - \alpha)^2} \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\frac{\pi k}{L} x) e^{-D\frac{\pi^2 k^2}{L^2} t} \left(\frac{L}{2}\delta_{k,2} + \frac{L}{2}\delta_{k,1} \left(\frac{t e^{(D\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - \alpha)t}}{D\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - \alpha} - \frac{e^{(D\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - \alpha)t}}{(D\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - \alpha)^2} + \frac{1}{(D\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - \alpha)^2} \right. \right. \\ &= \sin(\frac{2\pi}{L} x) e^{-D\frac{4\pi^2}{L^2} t} + \sin(\frac{\pi}{L} x) \left(\frac{t e^{-\alpha t}}{D\frac{\pi^2}{L^2} - \alpha} - \frac{e^{-\alpha t}}{(D\frac{\pi^2}{L^2} - \alpha)^2} + \frac{e^{-D\frac{\pi^2}{L^2} t}}{(D\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - \alpha)^2} \right) \end{aligned}$$

Bitte wenden!

4. Wir machen die Ansatz

$$u(x,y,t) = u_1(x,t)u_2(y,t)$$

dann erhalten wir zwei Probleme

$$\begin{cases} u_{1,t} = Du_{1,xx} \\ u_1(0,t) = u_1(L,t) = 0 \\ u_1(x,0) = \cos(\frac{\pi}{2L}x) \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} u_{2,t} = Du_{2,yy} \\ u_2(0,t) = 0 \\ u_2(y,0) = \begin{cases} 1 & 1 < y < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases} \tag{2}$$

Um (1) zu lösen berechnen wir das EWP

$$\begin{cases} \varphi_{xx} + \lambda\varphi = 0 \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0 \end{cases}$$

Die zugehörige normierte Lösung ist

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{\pi k}{L}x) \quad \lambda_k = \frac{\pi^2}{L^2}k^2$$

mit $k = 1, 2, 3, \cdots$.
Den Wärmeleitungskern ist

$$K(x,\xi,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\varphi_k(\xi)e^{-D\lambda_k t} = \frac{2}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\sin(\frac{\pi k}{L}x)\sin(\frac{\pi k}{L}\xi)e^{-D\frac{\pi^2 k^2}{L^2}t}$$

Dann ist

$$u_1(x,t) = \int_0^L \cos(\frac{\pi}{2L}\xi)K(x,\xi,t)d\xi = \sum_{k=1}^{\infty}\sin(\frac{\pi k}{L}x)e^{-D\frac{\pi^2k^2}{L^2}t}\frac{2}{L}\int_0^L \cos(\frac{\pi}{2L}\xi)\sin(\frac{\pi k}{L}\xi)d\xi$$

mit

$$\begin{aligned} \int_0^L \cos(\frac{\pi}{2L}\xi)\sin(\frac{\pi k}{L}\xi)d\xi &= -\frac{\cos\left(\left(\frac{\pi k}{L}+\frac{\pi}{2L}\right)\xi\right)}{2\left(\frac{\pi k}{L}+\frac{\pi}{2L}\right)} - \frac{\cos\left(\left(\frac{\pi k}{L}-\frac{\pi}{2L}\right)\xi\right)}{2\left(\frac{\pi k}{L}-\frac{\pi}{2L}\right)}\Bigg|_0^L \\ &= \frac{L}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k-1}-\frac{\cos\left(\pi k+\frac{\pi}{2}\right)}{2k+1}-\frac{\cos\left(\pi k-\frac{\pi}{2}\right)}{2k-1}\right) \\ &= \frac{L}{\pi}\left(\frac{2k-1}{4k^2-1}+\frac{2k+1}{4k^2-1}\right) = \frac{4Lk}{\pi(4k^2-1)} \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

erhalten wir

$$u_1(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}\sin(\frac{\pi k}{L}x)e^{-D\frac{\pi^2 k^2}{L^2}t}$$

Um (2) zu lösen erweitern wir das Gebiet auf $(-\infty,\infty)$

$$\begin{cases} u_{2,t} = Du_{2,yy} \\ u_2(y,0) = \begin{cases} 1 & 1<y<2 \\ -1 & -2<y<-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Wenn wir die Lösung

$$v(y,t) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

zum Standard problem

$$\begin{cases} v_t = Dv_{yy} \\ v_(y,0) = h(y) = \begin{cases} 1 & y<0 \\ 0 & y>0 \end{cases} \end{cases}$$

kennen, stellen wir $u_2(y,0)$ durch $h(y)$ dar.

$$u_2(y,0) = h(y-2) - h(y-1) - h(y+1) + h(h+2)$$

Wir erhalten

$$u_2(y,t) = \frac{1}{2}\left(\text{erfc}\left(\frac{y-2}{2\sqrt{Dt}}\right) - \text{erfc}\left(\frac{y-1}{2\sqrt{Dt}}\right) - \text{erfc}\left(\frac{y+1}{2\sqrt{Dt}}\right) + \text{erfc}\left(\frac{y+2}{2\sqrt{Dt}}\right)\right)$$

Für die gesamte Lösung finden wir

$$\begin{aligned} u(x,y,t) \quad = \quad & \frac{4}{\pi}\left(\text{erfc}\left(\frac{y-2}{2\sqrt{Dt}}\right) - \text{erfc}\left(\frac{y-1}{2\sqrt{Dt}}\right) - \text{erfc}\left(\frac{y+1}{2\sqrt{Dt}}\right) + \text{erfc}\left(\frac{y+2}{2\sqrt{Dt}}\right)\right) \times \\ & \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}\sin(\frac{\pi k}{L}x)e^{-D\frac{\pi^2 k^2}{L^2}t} \end{aligned}$$